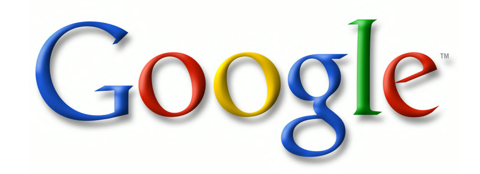
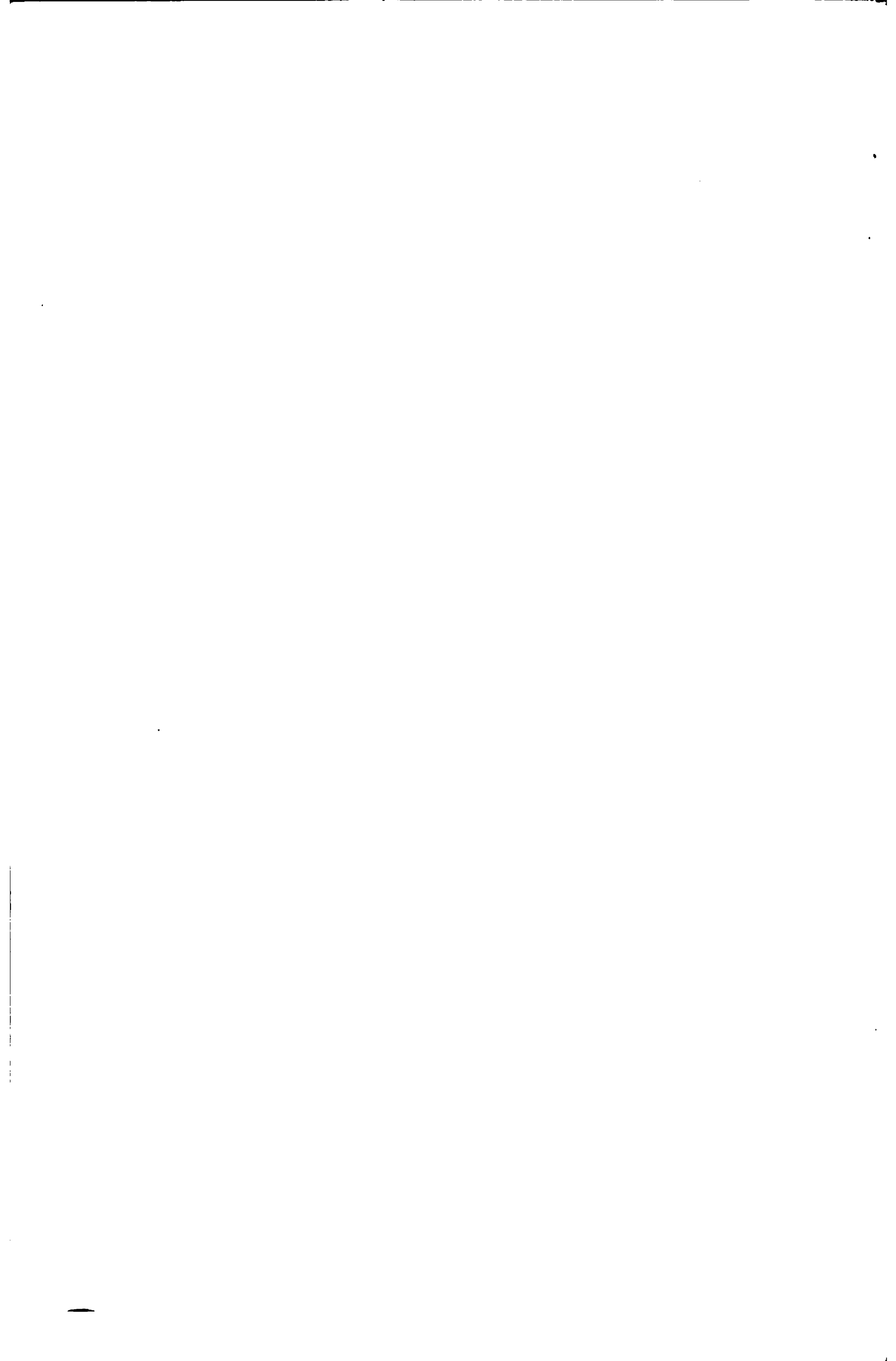










DIE MECHANIK

DES

HIMMELS

VORLESUNGEN

VON

CARL LUDWIG CHARLIER,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LUND.

ERSTER BAND.

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN.



LEIPZIG

VERLAG VON VEIT & COMP.

1902

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Dies Werk enthält, der Hauptsache nach, die Vorlesungen, die ich seit dem Herbste 1898 an der Universität zu Lund gehalten habe. Als Ziel habe ich mir gesteckt, eine möglichst *einheitliche* Darstellung des jetzigen Standpunkts der Untersuchungen über die Mechanik des Himmels, insofern sich dieselbe mit der Bewegung von Massenpunkten beschäftigt, zu geben. Es ist dabei mein Hauptstreben gewesen, die astronomisch wichtigen Resultate hervorzuheben, indem ich gleichzeitig die mathematische Eleganz und Schärfe, welche besonders die neueren Untersuchungen auf diesem Gebiete ermöglicht haben, zum Ausdruck zu bringen suchte.

Ich bin mir der Unvollkommenheit meiner Arbeit völlig bewusst. Eine Entschuldigung dafür kann ich nur darin suchen, dass es in der Uebergangsperiode, in welcher die Astronomie sich befindet, besonders schwierig ist, das Wesentliche von dem Unwesentlichen zu unterscheiden. An einigen Stellen ist vielleicht die mathematische Seite des Problems zu stark hervorgehoben auf Kosten der astronomischen, an anderen vielleicht umgekehrt, obgleich ich stets bestrebt gewesen bin, ein gesundes Gleichgewicht zwischen diesen beiden Hauptgesichtspunkten einzuhalten.

Um bei den mathematischen Untersuchungen die Fühlung mit der astronomischen Praxis zu wahren, habe ich an den wichtigeren Punkten numerische Beispiele — meistens dem Planetensystem entnommen — hinzugefügt, die geeignet sein können, die astronomische Bedeutung der Untersuchung zu beleuchten.

Der vorliegende erste Band enthält die allgemeinsten Resultate über das Zwei- und Drei-Körperproblem. Der Theorie der secularen Störungen habe ich einen ausführlichen Abschnitt gewidmet. Die

Bewegung eines Punktes, der von zwei festen Centren nach dem NEWTON'schen Gesetz attrahirt wird, habe ich sehr vollständig behandelt, indem ich von den Untersuchungen von STAUDE über bedingt periodische Bewegungen ausgegangen bin. In dem Abschnitt über das Problem der zwei Körper wird eine einfache Theorie der Kometenschweife gegeben.

In dem Anhange habe ich einige Tafeln aufgenommen, die für die numerische Berechnung der Störungen der Planeten — im Besonderen der kleinen Planeten — von Nutzen sind.

Der zweite Band, der im nächsten Jahre erscheinen soll, wird hauptsächlich die Theorie der periodischen Lösungen des Problems der drei Körper und die Untersuchungen über die Convergenz der Reihen behandeln.

Dem Herrn Professor M. BRENDEL bin ich zu besonderem Dank verpflichtet für seine grosse Freundlichkeit, diesen Band in Bezug auf die deutsche Sprache zu prüfen und zu berichtigen.

Endlich spreche ich dem Herrn Verleger meinen herzlichen Dank aus für seine Bereitwilligkeit, die Vorlesungen zum Druck zu bringen, und für die Sorgfalt, mit welcher der Druck ausgeführt worden ist.

Lund, Mai 1902.

C. V. L. Charlier.

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Bewegung eines Punktes, der von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetz attrahirt wird.

Vierter Abschnitt.

Das Problem der zwei Körper.

Fünfter Abschnitt.

Das Problem der drei Körper.

Sechster Abschnitt.

Störungstheorie.

Siebenter Abschnitt.

Theorie der secularen Störungen.

Anhang.

ERSTER ABSCHNITT

HILFSSÄTZE AUS DER MATHEMATIK UND DER MECHANIK



§ 1. Sätze aus der Determinantentheorie.

Eine Determinante $\varDelta$ aus n^2 Elementen wird geschrieben:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder gekürzt:

$$\varDelta = |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots n).$$

Das *Multiplicationstheorem* lautet:

$$|a_{ij}| \times |b_{ij}| = |C_{ij}|,$$

wo

$$C_{ij} = a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \dots + a_{in} b_{jn}. \tag{1}$$

Da jede Determinante eine lineare Function eines jeden ihrer Elemente ist, so ist immer

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ij}}$$

dem Coefficienten von a_{ij} gleich, wenn die Determinante vollständig entwickelt wird. Man hat auch immer

$$\begin{cases} a_{i1} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{j1}} + a_{i2} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{j2}} + \dots + a_{in} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{jn}} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ \varDelta \text{ für } i = j \end{cases} \\ a_{1i} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{1j}} + a_{2i} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{2j}} + \dots + a_{ni} \dfrac{\partial \varDelta}{\partial a_{nj}} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ \varDelta \text{ für } i = j \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

In gleicher Weise erhält man

$$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}}$$

als den Coefficienten von $a_{ij}\, a_{kl}$ bei der Entwickelung der Deter-

minante. Die Ausdrücke für diese abgeleiteten Functionen werden erhalten — bis auf das Zeichen — indem man aus der Determinante diejenigen Reihen und Zeilen wegstreicht, die sich in denjenigen Elementen schneiden, welche in dem Nenner des Differentialquotienten vorkommen.

Sämmtliche Differentialquotienten einer Determinante lassen sich als ganze Functionen der Differentialquotienten erster Ordnung ausdrücken.

Wenn man die adjungirte Determinante von a_{ij} mit α_{ij} bezeichnet, so daß also:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}},$$

so bekommt man nach dem Multiplicationstheorem und unter Berücksichtigung von (2):

$$|\alpha_{ij}| \times |a_{ij}| = \Delta^n,$$

und mithin

$$|\alpha_{ij}| = \Delta^{n-1}. \tag{3}$$

Hieraus und nach (1) bekommt man weiter:[1]

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ij}, & \alpha_{il} \\ \alpha_{kj}, & \alpha_{kl} \end{vmatrix} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{il}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kj}}. \tag{4}$$

Für den Differentialquotienten dritter Ordnung bekommt man in ähnlicher Weise:

$$\Delta^2 \frac{\partial^3 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}\, \partial a_{pq}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ij}, & \alpha_{il}, & \alpha_{iq} \\ \alpha_{kj}, & \alpha_{kl}, & \alpha_{kq} \\ \alpha_{pj}, & \alpha_{pl}, & \alpha_{pq} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Aus (4) folgt:

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}} = -\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{il}\, \partial a_{kj}},$$

oder, da die Gleichung eine Identität ist und Δ also wegdividirt werden kann:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}} = -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{il}\, \partial a_{kj}}. \tag{6}$$

---

[1] Ich verweise in Bezug auf den Beweis auf Laurent: Traité d'Analyse I.

Aus (4) folgt weiter, daß *für* $\varDelta = 0$

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kl}} = \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{il}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kj}}. \tag{7}$$

Ein System von linearen Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = k_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = k_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = k_n \end{array} \right. \tag{8}$$

hat zur Lösung

$$\varDelta x_i = k_1 \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1i}} + k_2 \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{2i}} + \ldots + k_n \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ni}} \tag{9}$$

unter Voraussetzung, dass $\varDelta \neq 0$.

Ist $\varDelta = 0$, sind aber die Differentialquotienten erster Ordnung *nicht* sämmtlich gleich Null, so lautet die Lösung von (8):

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ss}} x_j = x_s \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{sj}} + \sum_{r=1}^{n} k_r \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ss} \partial a_{rj}} \qquad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{10}$$

wo s einen beliebigen Werth $(1, 2, \ldots n)$ annehmen kann.

Sind die rechten Glieder von (8) sämmtlich gleich Null, so bekommt man aus (10) die bekannte Formel:

$$\frac{x_j}{\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{sj}}} = \frac{x_s}{\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ss}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{11}$$

Wenn $\varDelta = 0$, so sind somit die Gleichungen (8) nicht von einander unabhängig, und man kann durch (10) oder (11) $n - 1$ von den Grössen x_j durch eine derselben (x_1) linear ausdrücken.

Wenn *nicht nur* $\varDelta$, *sondern auch sämmtliche Unterdeterminanten* = Differentialquotienten) *erster Ordnung verschwinden*, dann hat man, wenn z. B.

$$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{11}\, d\, a_{22}} \neq 0,$$

folgende Ausdrücke für x_j:

$$(12)\quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}}\,x_j = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{1j}\,\partial a_{22}}\,x_1 + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{11}\,\partial a_{2j}}\,x_2 + \sum_{r=1}^{n} k_r\,\frac{\partial^3 \Delta}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{rj}}\,.$$

§ 2. Ueber Functionaldeterminanten.

Wenn $y_1, y_2, \dots y_n$ n Functionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnen, dann nennt man *Functionaldeterminante* oder *JACOBI'sche Determinante* (weil zuerst von JACOBI näher studirt) die folgende:

$$(1)\qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right|.$$

Dieselbe wird auch öfters in folgender Weise bezeichnet:

$$(2)\qquad J = \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots . x_n)}.$$

Wenn $y_1, y_2, \dots y_n$ die partiellen Differentialquotienten einer Function f sind, also:

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so wird die Determinante die *HESSE'sche Determinante von f* genannt, und ihr Ausdruck ist somit:

$$(3)\qquad H = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} \right| \qquad (i, j = 1, 2, \dots n).$$

Jede Functionaldeterminante lässt sich als Quotient zweier Determinanten darstellen.

Wenn nämlich $d_j x_1, d_j x_2, \dots d_j x_n$ irgend ein System von *gleichzeitigen* unendlich kleinen Aenderungen von $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnen, so sind die *entsprechenden* Aenderungen von $y_1, y_2, \dots, y_n$ durch folgende Formel gegeben:

$$d_j y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} d_j x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} d_j x_2 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} d_j x_n,$$

$$d_j y_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} d_j x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} d_j x_2 + \ldots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} d_j x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_j y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} d_j x_1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} d_j x_2 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} d_j x_n.$$

Nun ist aber nach dem Multiplicationstheorem:

$$\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| \times \left| d_i x_j \right| = \left| C_{ij} \right|,$$

wo

$$C_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} d_j x_1 + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} d_j x_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} d_j x_n = d_j y_i,$$

und man hat somit:

$$J = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = \frac{|d_j y_i|}{|d_i x_j|} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Aus diesem Satze kann man verschiedene wichtige Eigenschaften der Functionaldeterminanten ableiten; im Besonderen folgt hieraus unmittelbar, dass:

$$\left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| = \left| \frac{\partial y_i}{\partial u_s} \right| \times \left| \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right| \tag{5}$$

und speciell

$$1 = \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \right| \times \left| \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \right|. \tag{6}$$

Der wichtigste Satz, der sich auf Functionaldeterminanten bezieht, ist in dem folgenden, von Jacobi aufgestellten Lehrsatz enthalten:

Die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind, verschwindet, und Functionen, deren Determinante verschwindet, sind nicht unabhängig von einander.

Der erste Theil dieses Satzes wird von Jacobi in folgender Weise bewiesen.[1]

---

[1] Jacobi: Ueber Functionaldeterminanten, herausgegeben von P. Stäckel. Ostwald's Klassiker Nr. 78.

Es soll bewiesen werden, dass die Determinante von Functionen, die nicht unabhängig von einander sind, verschwindet.

Es seien $f_0, f_1, \ldots f_n$ nicht unabhängig von einander, es bestehe vielmehr zwischen ihnen die Gleichung:

$$\Pi(f_0, f_1, \ldots f_n) = 0, \tag{7}$$

die zu einer identischen wird, wenn man für $f_0, f_1, \ldots, f_n$ die Ausdrücke in den Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ einsetzt, denen sie gleich sind. Differentiirt man die vorhergehende Gleichung nach den einzelnen Veränderlichen, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f_0}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}, \\
0 &= \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \ldots + \frac{d f_n}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}, \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 &= \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}.
\end{aligned}$$

Diese $n + 1$ Gleichungen lassen sich ansehen als ein System linearer Gleichungen zwischen der gleichen Anzahl von Unbekannten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_0}, \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial f_n},$$

bei dem die constanten Glieder gleich Null sind. Bei einem solchen System muss nach (9) § 1 die Determinante verschwinden, falls nicht etwa alle Unbekannten gleichzeitig verschwinden. Es können aber nicht alle Grössen $\frac{\partial \Pi}{\partial f_0}$ u. s. w. gleichzeitig verschwinden, denn das würde bedeuten, daß Π von allen $f_0, f_1, \ldots f_n$ frei wäre. So oft also die Functionen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander sind, muß:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n)$$

werden. Und das war zu beweisen.

Der Beweis von JACOBI für den zweiten Theil des Satzes — dass Functionen, deren Determinante verschwindet, nicht unabhängig von einander sind — ist etwas umständlicher. Er ist indessen einfach und übersichtlich und ich gebe deswegen diesen Beweis hier wörtlich wieder.

Wir wollen mit $A_0, A_1, \ldots, A_n$ die Ausdrücke bezeichnen, die man in der Determinante

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n)$$

der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}, \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}$$

multiplicirt findet. Dann hat man nach (2) § 1 die identischen Gleichungen:

$$J = \frac{\partial f_0}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_1} A_1 + \ldots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} A_n, \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} A_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \frac{\partial f_n}{\partial x_0} A_0 + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} A_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} A_n. \end{array} \right. \tag{9}$$

Wir wollen annehmen, daß die Functionen unabhängig von einander sind; sind sie es nämlich nicht, so gilt bereits, was wir beweisen wollen, dass die Functionen nicht unabhängig von einander sind. Man kann nun n von den Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch x_0 und $f_1, f_2, \ldots f_n$ ausdrücken.

Führt man diese Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in die Function f_0 ein, so wird f_0 eine Function der Veränderlichen:

$$x_0, f_1, f_2, \ldots, f_n.$$

Die partiellen Differentiale in Bezug auf diese Veränderlichen wollen wir in Klammern einschliessen. Dann wird:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_0} + \cdots + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial f_0}$$

und ferner, wenn i irgend einen der Indices $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (8) ein, so erkennt man, dass die Ausdrücke, die der Reihe nach mit:

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right), \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_2}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_n}\right)$$

multiplicirt sind, wegen (9) identisch verschwinden. Mithin ergiebt sich die bemerkenswerthe Formel:

$$J = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) \Delta. \tag{10}$$

Verschwindet also die Determinante auf der linken Seite, so muss entweder $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$ oder die Determinante:

$$\Delta = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

verschwinden.

Wir setzen voraus, dass die Behauptung für n Functionen gilt, oder dass n Functionen nicht unabhängig von einander sind, wenn ihre Determinante verschwindet. Mithin würden, wenn die vorhergehende Determinante Δ verschwände, die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht unabhängig von einander sein, und das widerspricht der Voraussetzung, die wir gemacht haben. Folglich muss der andere Factor $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)$ verschwinden, und hieraus folgt, dass f_0 allein von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ohne die Veränderliche x_0 ausgedrückt werden kann. Mithin sind die Functionen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ nicht unabhängig von einander, was zu beweisen war.

Nachdem wir die Behauptung für $n + 1$ Functionen bewiesen haben, sobald sie für n Functionen gilt, wird sie allgemein gelten,

sobald sie für zwei Functionen erhärtet ist. Das geschieht folgendermaßen.

Es seien f_0 und f_1 Functionen von x_0 und x_1, deren Determinante verschwindet, oder es sei identisch:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 0.$$

Nun ist f_1 entweder eine Constante oder enthält wenigstens eine der beiden Veränderlichen, etwa x_1, und dann läßt sich x_1 durch x_0 und f_1 ausdrücken. Setzt man diesen Ausdruck in f_0 ein, so wird:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial f_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$

mithin

$$0 = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.$$

Der zweite Factor $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ verschwindet nicht, da wir voraussetzen, daß f_1 gerade x_1 enthalten soll, mithin ist:

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right) = 0,$$

oder die Function f_0, ausgedrückt durch x_0 und f_1, wird frei von x_0 und ist eine Function von f_1 allein. Hiermit ist dargethan: So oft die Identität:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_0} = 0$$

besteht, ist entweder f_1 eine Constante oder f_0 eine Function von f_1, und es sind also die Functionen f_0 und f_1 nicht unabhängig von einander. Und das war zu beweisen.

So lautet der Jacobi'sche Beweis für diesen wichtigen Satz.

Die obigen Theoreme können auch in folgender Weise ausgedrückt werden:

1. *Functionen, deren Determinante nicht verschwindet, sind von einander unabhängig.*

2. *Die Determinante von Functionen, die unabhängig von einander sind, verschwindet nicht.*

Beispiel. Es seien gegeben die folgenden drei Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0.$$

Die Bedingungen dafür, daß diese Gleichungen von einander unabhängig, sind zu suchen.

Die Functionaldeterminante lautet:

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x - a, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a, & 0, & 0 \\ x - a, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 4a \begin{vmatrix} y, & z \\ \beta, & \gamma \end{vmatrix}.$$

Die Determinante verschwindet, und die Gleichungen sind also nicht unabhängig von einander, wenn:

$$a = 0,$$

oder

$$\beta = \gamma = 0.$$

Im ersten Falle werden in der That die zwei ersten Gleichungen identisch, im letzteren Falle wird die dritte Gleichung aus den anderen abgeleitet, indem man die Gleichungen von einander subtrahirt.

Die Determinante verschwindet auch, wenn y und z solche Werthe haben, dass

$$\gamma y - \beta z = 0.$$

Die nähere Untersuchung solcher Fälle wird in dem folgenden Paragraphen gegeben.

Wenn die n Gleichungen, welche die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit einander verbinden, *impliciter* Form sind, also von der Form:

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; \quad x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann man die Functionaldeterminante:

$$\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

folgendermassen bilden.

Man hat

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}$$

und mithin

$$-\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j},$$

und es ist also:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \times \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| = (-1)^n \left|\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right|$$

oder

$$(12) \qquad \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| = (-1)^n \left|\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right| : \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|.$$

§ 3. Vielfache Lösungen eines Systems von Gleichungen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie der Functionaldeterminanten bezieht sich auf die Untersuchung der vielfachen Lösungen eines vorliegenden Systems von Gleichungen.

Es sei:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = 0, \\ &\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = 0 \end{aligned}$$

ein System von n gleichzeitigen Gleichungen, in denen ausser den Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auch ein *Parameter* x vorkommt.

Wir nehmen nun an, dass zu dem Werth $x = x_0$ das Werthsystem $y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n$ gehört, und wollen nun diejenigen Werthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bestimmen, die einem Werth von x in der Nähe von $x = x_0$ entsprechen.

Wir setzen zu dem Zweck:

$$x = x_0 + \xi,$$
$$y_i = y^0_i + \eta_i,$$

und die Gleichungen (1) lauten somit:

$$\varphi_i(y^0_1 + \eta_1, y^0_2 + \eta_2, \ldots, y^0_n + \eta_n; x_0 + \xi) = 0,$$

wo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Entwickeln wir nun diese Gleichungen nach dem TAYLOR'schen Lehrsatze und beachten, dass nach der Voraussetzung:

$$\varphi_i(y^0_1, y^0_2, \ldots, y^0_n; x_0) = 0,$$

so bekommt man zur Bestimmung von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ die Gleichungen:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}\eta_n + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\xi + R_1 = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}\eta_n + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\xi + R_2 = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n}\eta_n + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\xi + R_n = 0, \end{array}\right.$$

wo $R_1, R_2, \ldots, R_n$ die Glieder zweiten oder höheren Grades in den Entwickelungen bezeichnen.

Bezeichnen wir nun die Functionaldeterminante von φ mit Δ, so dass:

$$(3)\qquad \Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

und setzen:

$$(4)\qquad a_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j},$$

so dass auch:

$$\Delta = |\, a_{ij} \,|,$$

so ist die Lösung von (2) von dem Werth der Functionaldeterminante abhängig.

Ist erstens:

$$\Delta \neq 0,$$

so bekommt man nach (9) § 1:

$$(5)\qquad \begin{aligned} -\Delta\eta_i = \xi\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{1i}} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ni}}\right] \\ + R_1\frac{\partial\Delta}{\partial a_{1i}} + R_2\frac{\partial\Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + R_n\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ni}}. \end{aligned}$$

Die Glieder, die mit R_i multiplicirt sind, sind mindestens von dem zweiten Grad in ξ und η_p, und weil nun $\Delta \neq 0$, so kann man ξ so klein wählen, dass die Glieder in der letzten Reihe beliebig klein ausfallen im Verhältniss zu dem ersten Glied. Es folgt hieraus, dass zu einem hinreichend kleinen Werthe von ξ in diesem Fall ein einziges System von Werthen für die Größen η_i gehört.

Wenn $\Delta \neq 0$, so ist die Lösung somit eine einfache.

Ist dagegen $\Delta = 0$, sind aber die Unterdeterminanten erster Ordnung von Δ nicht sämmtlich verschwindend, so lautet die Gleichung (5):

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = A\xi + \\ + R_1\frac{\partial\Delta}{\partial a_{1i}} + R_2\frac{\partial\Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + R_n\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ni}}, \end{aligned}\right.$$

wo

$$A = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{1i}} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{2i}} + \dots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ni}}.$$

Andererseits hat man nun nach (10) § 1:

$$(7)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ss}}\eta_j = \eta_s\frac{\partial\Delta}{\partial a_{sj}} - \sum_{r=1}^{n}\left(\xi\frac{\partial\varphi_r}{\partial x} + R_r\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ss}\,\partial a_{rj}},$$

wo $j = 1, 2, \dots, n$ und s einen beliebigen Werth $(1, 2, \dots, n)$ annehmen kann.

Mit Hilfe dieser Formel kann man sämmtliche η_j durch einen einzigen, z. B. η_1 ausdrücken. Behalten wir nun in (6) nur die Glieder niedrigster Ordnung, so lautet diese Gleichung:

$$(8)\qquad C\eta_1^2 + B\eta_1\xi + A\xi = 0,$$

wo man das zweite Glied vernachlässigen kann, wenn $A \neq 0$. In diesem Fall hat man also:

$$\eta_1 = \pm\sqrt{\xi}\sqrt{-\frac{A}{C}},$$

und jedem Werth von ξ entsprechen *zwei* verschiedene Werthe von η_1. Man hat also hier eine *Doppellösung.*

Würden nun weiter auch sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung von $\varDelta$ verschwinden, so würde man die Lösung von (2) in folgender Weise erhalten:

Aus (7) erhält man:

$$0 = \sum_{r=1}^{n} \left(\xi \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + R_r \right) \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ss}\, \partial a_{rj}}, \tag{9}$$

wo s einen beliebigen Werth $(1, 2, \ldots, n)$ annehmen kann.

Da nun in diesem Falle nach § 1 $n-2$ von den Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sich durch zwei beliebige von ihnen — z. B. η_1 und η_2 — ausdrücken lassen, so erhält man aus (9) für $s = 1$ und $s = 2$ zwei Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} 0 &= E_1 \eta^2_1 + E_2 \eta_1 \eta_2 + E_3 \eta^2_2 + (E_4 \eta_1 + E_5 \eta_2) \xi + E_6 \xi^2 + E_7 \xi, \\ 0 &= F_1 \eta^2_1 + F_2 \eta_1 \eta_2 + F_3 \eta^2_2 + (F_4 \eta_1 + F_5 \eta_2) \xi + F_6 \xi^2 + F_7 \xi \end{aligned}$$

und wenn die Coefficienten E und F nicht verschwinden, so bekommt man nun also eine *vierfache* Lösung der Gleichungen (2).

Wir finden also, dass, *wenn die Functionaldeterminante für bestimmte Werthe der Grössen x und y_i verschwindet, zu diesen Werthen immer eine vielfache Lösung des vorliegenden Systems von Gleichungen gehört.*

Beispiel. Man betrachte die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

wo a einen Parameter bezeichnet.

Die Functionaldeterminante lautet:

$$\varDelta = 4 \begin{vmatrix} x-a, & y \\ x, & y \end{vmatrix} = -4ay,$$

welche verschwindet, wenn $a = 0$, in welchem Falle die Gleichungen nicht unabhängig sind, und für $y = 0$. Dem letzteren Falle entspricht in der That eine Doppellösung des vorliegenden Systems.

§ 4. Lineare Substitutionen.

Wenn man die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegen neue Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vertauscht, welche mit den vorigen durch lineare

Relationen verbunden sind, so entsteht eine *lineare Substitution.* Bei einer solchen ist also allgemein:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \cdots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \cdots + \gamma_{2n} y_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \cdots + y_{nn} y_n. \end{cases}$$

Man nennt diese Substitution *orthogonal*, wenn

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Setzt man die Gleichungen (1) in (2) ein, so bekommt man für eine orthogonale Substitution folgende Relationen zwischen den Coefficienten:

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{n} \gamma_{i\mu}\, \gamma_{i\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ +1 & \;\;\text{„}\;\; \mu = \nu \end{cases},$$

welche Gleichungen auch in folgender Weise geschrieben werden können:

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_{\mu i}\, \gamma_{\nu i} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ +1 & \;\;\text{„}\;\; \mu = \nu \end{cases}.$$

Die Anzahl dieser Relationen zwischen den Coefficienten in einer orthogonalen Substitution ist $\frac{n(n+1)}{2}$, und da die ganze Zahl der Coefficienten gleich n^2 ist, so ist die Zahl der unabhängigen Coefficienten also

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Für $n = 3$ hat man also drei unabhängige Coefficienten (die Euler'schen Winkelcoordinaten). Es lässt sich zeigen, dass in dem allgemeinen Fall die n^2 Coefficienten sich *rational* durch $\frac{1}{2} n(n-1)$ unbestimmte Grössen ausdrücken lassen.

Mit Hilfe der Relationen (3) erhält man nach dem Multiplicationstheorem

$$\Delta^2 = +1.$$

Die bekannteste orthogonale Substitution ist diejenige, durch

welche man die Veränderungen der Coordinaten bei einer Drehung eines rechtwinkligen Coordinatensystems ausdrückt.

Von besonderem Interesse sind die Transformationen eines Polynoms zweiten oder höheren Grades mittels orthogonalen Substitutionen.

Ganze homogene Functionen nennt man *Formen*. Diese Formen sind *quadratisch*, *cubisch* u. s. w., je nach ihrer Gradzahl. Dieselben werden *binäre*, *ternäre* u. s. w. Formen genannt, je nachdem die Zahl der eingehenden Veränderlichen zwei, drei oder höher ist.

Eine *quadratische Form*

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

wo $a_{ij} = a_{ji}$, kann immer durch eine orthogonale Substitution in eine *Summe von nur Quadraten* transformirt werden.

Macht man nämlich die Substitution (1) in (4) und bestimmt die Coefficienten γ_{ij} so, dass

$$\sum a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu, \tag{5}$$

so bekommt man zur Bestimmung von γ_{ij} hier $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen. Da die Substitution orthogonal sein soll, kommen noch $\frac{n(n+1)}{2}$ Relationen dazu, und hiermit hat man die genügende Zahl von Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten γ_{ij}.

Diese Bestimmung geschieht in der folgenden Weise.

Man kann (5) folgendermaassen schreiben:

$$\gamma_{1\mu}[a_{11}\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{2\nu} + \cdots + a_{1n}\gamma_{n\nu}] + \gamma_{2\mu}[a_{21}\gamma_{1\nu} + a_{22}\gamma_{2\nu} + \cdots + a_{2n}\gamma_{n\nu}] + \cdots + \gamma_{n\mu}[a_{n1}\gamma_{1\nu} + a_{n2}\gamma_{2\nu} + \cdots + a_{nn}\gamma_{n\nu}] = 0.$$

Andererseits ist nach (3):

$$\gamma_{1\mu} \cdot \gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu} \cdot \gamma_{2\nu} + \cdots + \gamma_{n\mu} \cdot \gamma_{n\nu} = 0.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\mu = 1, 2, \ldots, n$ mit Ausschluss des Werthes $\mu = \nu$, so findet man bei einem Vergleich zwischen den so entstandenen beiden Gleichungssystemen, dass

$$\frac{a_{11}\gamma_{1\nu}+a_{12}\gamma_{2\nu}+\cdots+a_{1n}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{1\nu}}=\frac{a_{21}\gamma_{1\nu}+a_{22}\gamma_{2\nu}+\cdots+a_{2n}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{2\nu}}=$$
$$=\ldots=\frac{a_{n1}\gamma_{1\nu}+a_{n2}\gamma_{2\nu}+\cdots+a_{nn}\gamma_{n\nu}}{\gamma_{n\nu}}.$$

Nennt man den gemeinsamen Werth dieser Quotienten s_ν, so bekommt man also folgendes System von Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} (a_{11}-s_\nu)\gamma_{1\nu}+a_{12}\gamma_{2\nu}+\cdots+a_{1n}\gamma_{n\nu}=0,\\ a_{21}\gamma_{1\nu}+(a_{22}-s_\nu)\gamma_{2\nu}+\cdots+a_{2n}\gamma_{n\nu}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\gamma_{1\nu}+a_{n2}\gamma_{2\nu}+\cdots+(a_{nn}-s_\nu)\gamma_{n\nu}=0. \end{cases}$$

Wird noch die Gleichung

$$(6^*)\qquad \sum_{i=1}^{n}\gamma_{i\nu}^2=1$$

hinzugefügt, so sind hierdurch die Coefficienten $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}$ bestimmt.

Es wird weiter offenbar

$$(7)\qquad f=s_1y_1^2+s_2y_2^2+\cdots+s_ny_n^2,$$

und somit ist die betreffende Reduction fertig gebracht.

Zur Bestimmung von s_ν hat man nach (6) die Gleichung n^{ten} Grades:

$$(8)\qquad F(s)=\begin{vmatrix} a_{11}-s, & a_{12},\ldots,a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}-s,\ldots,a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1}, & a_{n2},\ldots,a_{nn}-s \end{vmatrix}=0.$$

Diese Gleichung hat (für reelle a_{ij}) *nur reelle Wurzeln.*

Dieser Satz wird in folgender Weise bewiesen.

Es seien s_μ und s_ν zwei *conjugirte* imaginäre Wurzeln. Die entsprechenden Coefficienten $\gamma_{i\mu}$ und $\gamma_{i\nu}$ müssen dann auch conjugirt sein, so dass man setzen kann:

$$\gamma_{i\mu} = \alpha_i + \sqrt{-1}\,\beta_i,$$

$$\gamma_{i\nu} = \alpha_i - \sqrt{-1}\,\beta_i.$$

Hieraus folgt

$$\gamma_{i\mu}\,\gamma_{i\nu} = \alpha_i^2 + \beta_i^2.$$

Nun ist aber nach (3), weil die Substitution orthogonal ist,

$$\sum \gamma_{i\mu}\,\gamma_{i\nu} = 0 \quad (\mu \mp \nu)$$

und

$$\sum \gamma_{i\mu}\,\gamma_{i\mu} = 1,$$

welche Gleichungen sich offenbar unter den gemachten Voraussetzungen widersprechen. Die Wurzeln können also nicht imaginär ausfallen.

Dagegen können *mehrfache Wurzeln* von (8) auftreten.

Hat $F(s)=0$ eine *doppelte* Wurzel, dann muss für diese auch

$$F'(s) = 0,$$

mithin

$$0 = F'(s) = -\frac{\partial F}{\partial a_{11}} - \frac{\partial F}{\partial a_{22}} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial a_{nn}}$$

sein. Diese Gleichung mit $\frac{\partial F}{\partial a_{ii}}$ multiplicirt lautet

$$0 = F'(s)\frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = -\frac{\partial F}{\partial a_{11}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ii}} - \frac{\partial F}{\partial a_{22}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ii}} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial a_{nn}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ii}}.$$

Nach § 1 Formel (7) ist aber, weil $F = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{kl}} = \frac{\partial F}{\partial a_{il}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{kj}},$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ii}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ll}} = \frac{\partial F}{\partial a_{il}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{li}} = \frac{\partial F}{\partial a_{il}}\,\frac{\partial F}{\partial a_{il}},$$

das letztere, weil die Determinante F symmetrisch ist. Man hat demnach

$$0 = F'(s)\frac{\partial F}{\partial a_{ii}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial a_{1i}}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{2i}}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{ni}}\right)^2,$$

aus welcher Gleichung nun folgt, dass *sämmtliche Unterdeterminanten zu F von der ersten Ordnung verschwinden.*

In diesem Falle wird aber nach Formel (12) in § 1 die Lösung von (6) die folgende

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}} \gamma_{i\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_{1i}\, \partial a_{22}} \gamma_{1\nu} + \frac{\partial^2 F}{\partial a_{11}\, \partial a_{2i}} \gamma_{2\nu},$$

so dass die Coefficienten $\gamma_{i\nu}$ sich durch zwei derselben ausdrücken. Durch die Gleichung

$$\sum \gamma_{i\nu}^2 = 1$$

kommt eine Bedingung hinzu. Man kann also einem von den Coefficienten, z. B. $\gamma_{1\nu}$, einen beliebigen Werth zuertheilen.

Bei einer Doppelwurzel s_ν kann also einer von den entsprechenden Coefficienten $\gamma_{i\nu}$ willkürlich gewählt werden. —

Bei einer vielfachen Wurzel können mehreren von den Coefficienten beliebige Werthe zuertheilt werden.

Die Form

$$f = \sum s_\nu\, y_\nu^2$$

bleibt doch immer bestehen. Einer vielfachen Wurzel entsprechen mehrere Glieder mit *demselben* Factor s.

Beispiel 1. Es sei die binäre Form

$$f = 3x_1^2 + 8x_1 x_2 + 3x_2^2$$

gegeben; dieselbe soll durch eine orthogonale Substitution

$$x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2$$
$$x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2$$

in eine Summe von Quadraten umgeformt werden.

Man bekommt

$$F(s) = \begin{vmatrix} 3-s, & 4 \\ 4, & 3-s \end{vmatrix} = (s-7)(s+1).$$

Es wird also

$$f = 7y_1^2 - y_2^2,$$

und die entsprechenden Werthe der Coefficienten sind

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \gamma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \gamma_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Beispiel 2. Für die ternäre Form

$$f = x_1^2 + 3\,x_2^2 + 8\,x_2\,x_3 + 9\,x_3^2$$

bekommt man

$$F(s) = (1 - s)(1 - s)(11 - s),$$

also

$$s_1 = s_2 = 1; \quad s_3 = 11\,.$$

Man hat es hier also mit einer Doppelwurzel zu thun. Einer von den Coefficienten γ kann mithin willkürlich gewählt werden. Er sei γ_{11}. Man bekommt dann

$$\gamma_{11} = \gamma_{11}\;; \qquad \gamma_{12} = -\sqrt{1-\gamma_{11}^2}\;; \qquad \gamma_{13} = 0\,.$$

$$\gamma_{21} = -\frac{2\sqrt{1-\gamma_{11}^2}}{\sqrt{5}}\;; \qquad \gamma_{22} = -\frac{2\,\gamma_{11}}{\sqrt{5}}\;; \qquad \gamma_{23} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

$$\gamma_{31} = \frac{\sqrt{1-\gamma_{11}^2}}{\sqrt{5}}\;; \qquad \gamma_{32} = \frac{\gamma_{11}}{\sqrt{5}}\;; \qquad \gamma_{33} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Was für ein Werth auch dem Coefficienten γ_{11} zuertheilt wird, so hat man doch nun immer

$$f = x_1^2 + 3x_2^2 + 8\,x_2\,x_3 + 9\,x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + 11\,y_3^2.$$

§ 5. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten.

Solche Differentialgleichungen kommen in der Mechanik des Himmels häufig vor. Ihre Theorie, von Hermite begründet, ist zuerst von Floquet systematisch dargestellt worden in den „Annales de l'École Normale“ für die Jahre 1883 und 1884.

Ich werde mich hier besonders mit einem *System* von gleichzeitigen linearen Differentialgleichungen beschäftigen, zuerst werde ich indessen die Grundzüge der Floquet'schen Untersuchungen kurz wiedergeben.

Gegeben sei also eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$P(y) = \frac{d^n y}{d x^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + p_n(x) y = 0, \tag{1}$$

wo $p_1, \ldots, p_n$ periodische Functionen von x mit derselben Periode ω

sind. Für die Anwendungen dieser Gleichung in der Astronomie genügt es im Allgemeinen anzunehmen, dass diese Coefficienten eindeutige, stetige und analytische Functionen von x sind, die in jedem Punkt a sich nach den positiven Potenzen von $x - a$ entwickeln lassen. Durch die Untersuchungen von Fuchs in Crelle's Journal Bd. 66, welche nunmehr in die Lehrbücher übergegangen sind, ist es bekannt, dass man dann in jedem Punkt ein System von m Potenzreihen finden kann, welche die Gleichung (1) befriedigen, und aus denen jedes andere Integral sich linear ausdrücken lässt. Diese Potenzreihen bilden zusammen ein *Fundamentalsystem von Integralen.*

Es sei nun $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ein derartiges Fundamentalsystem zu (1). Dann müssen auch $f_1(x+\omega), f_2(x+\omega), \ldots, f_n(x+\omega)$ ein Fundamentalsystem bilden. Es ist nun immer möglich ein System von Coefficienten A_{ij} zu finden von der Art, dass

$$(2)\quad \begin{cases} f_1(x+\omega) = A_{11} f_1(x) + A_{12} f_2(x) + \ldots + A_{1n} f_n(x) \\ f_2(x+\omega) = A_{21} f_1(x) + A_{22} f_2(x) + \ldots + A_{2n} f_n(x) \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ f_n(x+\omega) = A_{n1} f_1(x) + A_{n2} f_2(x) + \ldots + A_{nn} f_n(x), \end{cases}$$

wo die Determinante

$$(3)\qquad |A_{ij}| \neq 0.$$

Wie ein solches System von Coefficienten bei den praktischen Anwendungen thatsächlich gefunden werden soll, werden wir später untersuchen.

Wir nehmen nun an, dass es möglich ist, ein Integral $F(x)$ von $P(y) = 0$ zu finden von der Art, dass

$$(4)\qquad F(x+\omega) = s\,F(x).$$

Functionen dieser Art, die also so beschaffen sind, dass sie, wenn das Argument mit einer vollen Periode vermehrt wird, denselben Werth, mit einem constanten *Multiplicator* s multiplicirt, wieder annehmen, nennt man *periodische Functionen von der zweiten Gattung.* Die Benennung rührt von Hermite her, welcher zuerst

solche Functionen bei dem Studium der LAMÉ'schen Gleichung untersucht hat.

Dies Integral $F(x)$ muss man auch durch die Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ linear ausdrücken können. Es sei hierzu

$$F(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \dots + u_n f_n(x), \tag{5}$$

wo $u_1, u_2, \dots, u_n$ gewisse Coefficienten bedeuten, die nicht sämmtlich verschwinden können.

Aus (4) und (5) folgt

$$\begin{aligned} s F(x) = F(x+\omega) &= u_1 f_1(x+\omega) + u_2 f_2(x+\omega) + \dots + u_n f_n(x+\omega) = \\ &= u_1 [A_{11} f_1(x) + A_{12} f_2(x) + \dots + A_{1n} f_n(x)] + \\ &+ u_2 [A_{21} f_1(x) + A_{22} f_2(x) + \dots + A_{2n} f_n(x)] + \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ u_n [A_{n1} f_1(x) + A_{n2} f_2(x) + \dots + A_{nn} f_n(x)] \\ &= s[u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \dots + u_n f_n(x)]. \end{aligned}$$

Es folgen also zur Bestimmung von $u_1, u_2, \dots, u_n$ die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} (A_{11} - s) u_1 + A_{21} u_2 + \dots + A_{n1} u_n &= 0, \\ A_{12} u_1 + (A_{22} - s) u_2 + \dots + A_{n2} u_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} u_1 + A_{2n} u_2 + \dots + (A_{nn} - s) u_n &= 0, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

wo wenigstens einer der Coefficienten u unbestimmt bleibt. Für s bekommt man hieraus die folgende Gleichung:

$$G(s) = \begin{vmatrix} A_{11} - s, & A_{21}, & \dots, & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22} - s, & \dots, & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \dots, & (A_{nn} - s) \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

welche man *die Gleichung in s* oder die *Fundamentalgleichung* nennt.

Hat $G(s) = 0$ *n verschiedene* Wurzeln, so giebt es n Integrale, die periodische Functionen von der zweiten Gattung sind. Diese

n Integrale bilden auch zusammen ein Fundamentalsystem von Integralen, denn bestände zwischen ihnen eine lineare Relation

$$C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x) + \ldots + C_n F_n(x) = 0,$$

so erhielte man, indem man x gegen $x + \omega$ vertauscht und diese Operation $n - 1$ mal wiederholt, n Gleichungen, aus denen folgen würde, dass

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \\ s_1^2, & s_2^2, & \ldots, & s_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{n-1}, & s_2^{n-1}, & \ldots, & s_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 = \begin{array}{r} (s_2 - s_1)(s_3 - s_1)\ldots(s_n - s_1) \\ (s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_2) \\ \cdots\cdots \\ (s_n - s_{n-1}) \end{array},$$

was nur möglich wäre, wenn zwei von den Wurzeln s einander gleich sind.

Kommen vielfache Wurzeln vor, so erhält man nicht in dieser Weise alle Integrale. Floquet hat gezeigt, dass zu einer vielfachen Wurzel von der Ordnung μ ein System von μ Integralen $F_1, \ldots, F_\mu$ gehört, die sich durch periodische Functionen $\varphi_{ij}(x)$ von der zweiten Gattung in folgender Weise darstellen lassen:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \varphi_{11}(x), \\ F_2(x) &= \varphi_{21}(x) + x\,\varphi_{22}(x), \\ &\cdots\cdots \\ F_\mu(x) &= \varphi_{\mu 1}(x) + x\,\varphi_{\mu 2}(x) + \ldots + x^{\mu-1}\varphi_{\mu\mu}(x). \end{aligned}$$

Ich werde mich indessen bei dieser Frage hier nicht aufhalten, da sie bei der Untersuchung eines *Systems* von gleichzeitigen Differentialgleichungen besprochen werden soll.

Ein solches System wird nach einer Methode untersucht, welche der Floquet'schen ähnlich ist. Die Discussion wird indessen in den Einzelheiten etwas anders und da (1) sich immer auf diesen Fall reduciren lässt, so gehe ich zu der Behandlung dieses allgemeineren Falles über. — Die Bestimmung der Form der Integrale

für diesen Fall ist von POINCARÉ gegeben in seinen „Méthodes nouvelles de la mécanique céleste".

Wir nehmen an, dass das vorliegende System von Gleichungen von folgender Form ist:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi_{11}\, x_1 + \varphi_{12}\, x_2 + \dots + \varphi_{1n}\, x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi_{21}\, x_1 + \varphi_{22}\, x_2 + \dots + \varphi_{2n}\, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \varphi_{n1}\, x_1 + \varphi_{n2}\, x_2 + \dots + \varphi_{nn}\, x_n, \end{cases}$$

wo φ_{11}, φ_{12} u. s. w. eindeutige und analytische, periodische Functionen von t sind mit der Periode 2π.

Nach der allgemeinen Theorie der linearen Gleichungen kann man sich ein System von n Lösungen der Gleichungen (8) verschaffen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{11}(t),\ x_2 = \psi_{12}(t),\ \dots,\ x_n = \psi_{1n}(t), \\ x_1 &= \psi_{21}(t),\ x_2 = \psi_{22}(t),\ \dots,\ x_n = \psi_{2n}(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 &= \psi_{n1}(t),\ x_2 = \psi_{n2}(t),\ \dots,\ x_n = \psi_{nn}(t). \end{aligned}$$

Wenn diese Integrale ein Fundamentalsystem ausmachen, so müssen die allgemeinen Integrale von (8) von folgender Form sein:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1\, \psi_{11}(t) + C_2\, \psi_{21}(t) + \dots + C_n\, \psi_{n1}(t), \\ x_2 &= C_1\, \psi_{12}(t) + C_2\, \psi_{22}(t) + \dots + C_n\, \psi_{n2}(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1\, \psi_{1n}(t) + C_2\, \psi_{2n}(t) + \dots + C_n\, \psi_{nn}(t), \end{aligned}$$

wo $C_1, C_2, \dots, C_n$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Da die Coefficienten $\varphi_{ij}(t)$ die Periode 2π besitzen, so bleiben $\psi_{ij}(t)$ auch Integrale, wenn t gegen $t + 2\pi$ vertauscht wird. Also ist

$$(9)\quad \begin{cases} \psi_{11}(t + 2\pi) = A_{11}\, \psi_{11}(t) + A_{12}\, \psi_{21}(t) + \dots + A_{1n}\, \psi_{n1}(t), \\ \psi_{12}(t + 2\pi) = A_{11}\, \psi_{12}(t) + A_{12}\, \psi_{22}(t) + \dots + A_{1n}\, \psi_{n2}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{1n}(t + 2\pi) = A_{11}\, \psi_{1n}(t) + A_{12}\, \psi_{2n}(t) + \dots + A_{1n}\, \psi_{nn}(t) \end{cases}$$

und ebenso

$$
(9^*)\quad \left\{\begin{array}{l}
\psi_{21}(t+2\pi) = A_{21}\psi_{11}(t) + A_{22}\psi_{21}(t) + \ldots + A_{2n}\psi_{n1}(t), \\
\psi_{22}(t+2\pi) = A_{21}\psi_{12}(t) + A_{22}\psi_{22}(t) + \ldots + A_{2n}\psi_{n2}(t), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_{2n}(t+2\pi) = A_{21}\psi_{1n}(t) + A_{22}\psi_{22}(t) + \ldots + A_{2n}\psi_{nn}(t)
\end{array}\right.
$$

u. s. w.

Es seien nun $\Theta_{\nu 1}(t), \Theta_{\nu 2}(t), \ldots, \Theta_{\nu n}(t)$ periodische Functionen von der zweiten Gattung, so dass

$$\Theta_{\nu i}(t+2\pi) = s_\nu\,\Theta_{\nu i}(t),$$

wo s_ν eine Constante bezeichnet. Wenn diese Functionen auch Integrale von (8) sind, so hat man

$$\theta_{\nu i}(t) = B_1\psi_{1i}(t) + B_2\psi_{2i}(t) + \ldots + B_n\psi_{ni}(t); \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und es ist dann

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\nu i}(t+2\pi) = {} & B_1[A_{11}\psi_{1i}(t) + A_{12}\psi_{2i}(t) + \ldots + A_{1n}\psi_{ni}(t)], \\
& + B_2[A_{21}\psi_{1i}(t) + A_{22}\psi_{2i}(t) + \ldots + A_{2n}\psi_{ni}(t)], \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + B_n[A_{n1}\psi_{1i}(t) + A_{n2}\psi_{2i}(t) + \ldots + A_{nn}\psi_{ni}(t)], \\
& = s_\nu\,[B_1\psi_{1i}(t) + B_2\,\psi_{2i}(t) + \ldots + B_n\,\psi_{ni}(t)].
\end{aligned}
$$

Die Grössen B_i werden also aus folgenden Gleichungen berechnet:

$$
(10)\quad \left\{\begin{array}{l}
(A_{11} - s_\nu)B_1 + A_{21}B_2 + \ldots + A_{n1}B_n = 0, \\
A_{12}B_1 + (A_{22} - s_\nu)B_2 + \ldots + A_{n2}B_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{1n}B_1 + A_{2n}B_2 + \ldots + (A_{nn} - s_\nu)B_n = 0,
\end{array}\right.
$$

und s_ν wird aus der Gleichung (7)

$$(7)\qquad G(s_\nu) = 0$$

estimmt.

Wenn man

$$s_\nu = e^{2 a_\nu \pi}$$

setzt, so findet man, dass $e^{-at}\, \Theta_{\nu i}(t)$ *periodische* Functionen (von der ersten Gattung) sind. Wir schreiben also

$$\Theta_{\nu i} = e^{a_\nu t}\, \lambda_{\nu i}(t),$$

wo nun $\lambda_{\nu i}(t)$ *periodische* Functionen der Zeit bezeichnen.

Sind sämmtliche Wurzeln s_ν der Fundamentalgleichung von einander verschieden, so haben nun die allgemeinen Integrale folgende Form:

$$(11)\quad \begin{cases} x_1 = C_1\, e^{a_1 t} \lambda_{11}(t) + C_2\, e^{a_2 t} \lambda_{21}(t) + \ldots + C_n\, e^{a_n t} \lambda_{n1}(t), \\ x_2 = C_1\, e^{a_1 t} \lambda_{12}(t) + C_2\, e^{a_2 t} \lambda_{22}(t) + \ldots + C_n\, e^{a_n t} \lambda_{n2}(t), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n = C_1\, e^{a_1 t} \lambda_{1n}(t) + C_2\, e^{a_2 t} \lambda_{2n}(t) + \ldots + C_n\, e^{a_n t} \lambda_{nn}(t). \end{cases}$$

Die Grössen a_i werden von POINCARÉ *charakteristische Exponenten* genannt. Sie spielen eine wichtige Rolle bei allen Stabilitätsuntersuchungen in der Mechanik.

Wenn die Fundamentalgleichung $G(s) = 0$ vielfache Wurzeln besitzt, wird die Form der Lösung unter Umständen eine andere.

Aus den Gleichungen (10) werden die *Quotienten* zwischen den Coefficienten B bestimmt. Einer von denselben ist also immer willkürlich und spielt die Rolle einer Integrationsconstante. Würde $G(s) = 0$ eine *Doppelwurzel* besitzen und für dieselbe *sämmtliche* Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, so könnten, wie wir in § 1 bewiesen haben, zwei von den entsprechenden B-Coefficienten willkürlich bestimmt werden. Man hat dann für diese Wurzel *zwei* Integrale, die beide periodische Functionen von der zweiten Gattung sind, mit *demselben* Multiplicator.

Sind aber *nicht alle* Unterdeterminanten von der ersten Ordnung gleich Null, so kann die Natur der Integrale in folgender Weise bestimmt werden.

Es sei s_1 eine Doppelwurzel.

Zu diesem s_1 gehört nun ein System von Werthen für B_1, $B_2, \ldots, B_n$ (von welchen Grössen eine willkürlich ist) und ein entsprechendes System von Θ-Functionen — $\Theta_{11}, \Theta_{12}, \ldots, \Theta_{1n}$, mit dem Multiplicator s_1. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= B_1 \psi_{11} + B_2 \psi_{21} + \cdots + B_n \psi_{n1}, \\
\Theta_{12} &= B_1 \psi_{12} + B_2 \psi_{22} + \cdots + B_n \psi_{n2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Theta_{1n} &= B_1 \psi_{1n} + B_2 \psi_{2n} + \cdots + B_n \psi_{nn},
\end{aligned}$$

wo wenigstens einer von den Coefficienten B_i — z. B. B_1 — von Null verschieden ist. Man kann daher das Fundamentalsystem ψ_{ij} gegen das folgende vertauschen:

$$\begin{array}{l}
\Theta_{11}, \psi_{21}, \ldots, \psi_{n1}, \\
\Theta_{12}, \psi_{22}, \ldots, \psi_{n2}, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\Theta_{1n}, \psi_{2n}, \ldots, \psi_{nn}.
\end{array}$$

Mit Hilfe dieses Fundamentalsystems bildet man *die Gleichung in s.* Statt der Gleichungen (9) hat man nun die folgenden:

$$\begin{aligned}
\Theta_{1i}(t + 2\pi) &= s_1 \Theta_{1i}(t), \\
\psi_{2i}(t + 2\pi) &= B_{21} \Theta_{1i}(t) + B_{22} \psi_{2i}(t) + \ldots + B_{2n} \psi_{ni}(t), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_{ni}(t + 2\pi) &= B_{n1} \Theta_{1i}(t) + B_{n2} \psi_{2i}(t) + \ldots + B_{nn} \psi_{ni}(t),
\end{aligned}$$

woraus die neue Gleichung in s entsteht

$$G_1(s) = \begin{vmatrix} s_1 - s, & 0, & \ldots, & 0 \\ B_{21}, & B_{22} - s, & \ldots, & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1}, & B_{n2}, & \ldots, & B_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung müssen mit den Wurzeln von (7) zusammenfallen (FLOQUET) und es ist also

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} B_{22} - s, & \ldots, & B_{2n} \\ . & . & . \\ B_{n2}, & \ldots, & B_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung muss also eine Wurzel gleich s_1 haben.

Aus (13) geht hervor, dass es ein System von Grössen $\varkappa_2$, $\varkappa_3, \ldots, \varkappa_n$ giebt, welche nicht sämmtlich gleich Null sind, und welche die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$(14) \qquad \begin{cases} (B_{22} - s_1)\varkappa_2 + \ldots + B_{n2}\varkappa_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ B_{2n}\varkappa_2 + \ldots + (B_{nn} - s_1)\varkappa_n = 0. \end{cases}$$

Wir können nun aus unserem Fundamentalsystem folgende Integrale bilden:

$$\begin{aligned} \Theta_{21}(t) &= \varkappa_1 \Theta_{11}(t) + \varkappa_2 \psi_{21}(t) + \ldots + \varkappa_n \psi_{n1}(t), \\ \Theta_{22}(t) &= \varkappa_1 \Theta_{12}(t) + \varkappa_2 \psi_{22}(t) + \ldots + \varkappa_n \psi_{n2}(t), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Theta_{2n}(t) &= \varkappa_1 \Theta_{1n}(t) + \varkappa_2 \psi_{2n}(t) + \ldots + \varkappa_n \psi_{nn}(t), \end{aligned}$$

wo $\varkappa_1$ eine unbestimmte Constante bezeichnet.

Aus diesen Gleichungen bekommt man

$$\begin{aligned} \Theta_{2i}(t + 2\pi) = \varkappa_1 s_1 \Theta_{1i}(t) \\ &+ \varkappa_2 [B_{21} \Theta_{1i}(t) + B_{22}\psi_{2i}(t) + \ldots + B_{2n}\psi_{ni}(t)] \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ \varkappa_n [B_{n1} \Theta_{1i}(t) + B_{n2}\psi_{2i}(t) + \ldots + B_{nn}\psi_{ni}(t)] \\ &= [\varkappa_1 s_1 + \varkappa_2 B_{21} + \ldots + \varkappa_n B_{n1}] \Theta_{1i}(t) + \\ &+ [\varkappa_2 B_{22} + \ldots + \varkappa_n B_{n2}] \psi_{2i} + \\ &+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ [\varkappa_2 B_{2n} + \ldots + \varkappa_n B_{nn}] \psi_{ni}(t), \end{aligned}$$

welche Gleichung in Folge der Relationen (14) die folgende Form annimmt

$$\begin{aligned}\Theta_{2i}(t+2\pi) &= [\varkappa_1 s_1 + \varkappa_2 B_{21} + \dots + \varkappa_n B_{n1}]\,\Theta_{1i}(t) + \\ &\quad + s_1 \varkappa_2 \psi_{2i} \quad + \dots + s_1 \varkappa_n \psi_{ni}(t) \\ &= [\varkappa_1 s_1 + \varkappa_2 B_{21} + \dots + \varkappa_n B_{n1}]\,\Theta_{1i}(t) + \\ &\quad + s_1 [\Theta_{2i}(t) - \varkappa_1 \Theta_{1i}(t)].\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$A = \varkappa_2 B_{21} + \dots + \varkappa_n B_{n1},$$

so genügt also $\Theta_{2i}(t)$ der folgenden Functionalgleichung

$$\Theta_{2i}(t+2\pi) = A\,\Theta_{1i}(t) + s_1\,\Theta_{2i}(t). \tag{15}$$

Wird hier mit

$$\Theta_{1i}(t+2\pi) = s_1\,\Theta_{1i}(t)$$

dividirt, so bekommt man

$$\frac{\Theta_{2i}(t+2\pi)}{\Theta_{1i}(t+2\pi)} = \frac{\Theta_{2i}(t)}{\Theta_{1i}(t)} + \frac{A}{s_1},$$

eine Gleichung, die befriedigt wird, wenn man setzt

$$\frac{\Theta_{2i}(t)}{\Theta_{1i}(t)} = \zeta_i(t) + \frac{A}{2\pi s_1}\,t,$$

wo $\zeta_i(t)$ eine periodische Function von t mit der Periode 2π bezeichnet.

Hieraus folgt, dass diejenigen Integrale, die der doppelten Wurzel s_1 entsprechen, die folgende Form besitzen

$$\Theta_{2i}(t) = \Theta'_{2i}(t) + \frac{A}{2\pi s_1}\,t\,\Theta_{1i}(t), \tag{16}$$

wo $\Theta'_{2i}(t)$ und $\Theta_{1i}(t)$ periodische Functionen von der zweiten Gattung mit demselben Multiplicator s_1 bedeuten.

Der Coefficient A ist nicht nothwendiger Weise von Null verschieden. Wenn $A = 0$, so sind sowohl $\Theta_{2i}(t)$ wie $\Theta_{1i}(t)$ periodische Functionen von der zweiten Gattung.

Ist s_1 eine dreifache Wurzel, so kommen mit t^2 multiplicirte Glieder zum Vorschein u. s. w. Dieses Thema findet man (für die Gleichung (1)) in der Abhandlung von Floquet näher ausgeführt.

Bei den praktischen Anwendungen dieser Theorie spielt die *Bildung der Gleichung in s*, $G(s) = 0$, eine wichtige Rolle. Ich werde mich deswegen etwas ausführlicher bei diesem Punkt aufhalten.

Die Aufgabe zerfällt in zwei: 1) Berechnung eines Fundamentalsystems von Integralen, 2) Berechnung der Coefficienten A_{ij} aus diesem Fundamentalsystem.

Betrachten wir zuerst die letztere Aufgabe. Mittelst der Gleichungen (9) hat man

$$(9)\quad \begin{cases} \psi_{i1}(t+2\pi) = A_{i1}\psi_{11}(t) + A_{i2}\psi_{21}(t) + \dots + A_{in}\psi_{n1}(t), \\ \psi_{i2}(t+2\pi) = A_{i1}\psi_{12}(t) + A_{i2}\psi_{22}(t) + \dots + A_{in}\psi_{n2}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{in}(t+2\pi) = A_{i1}\psi_{1n}(t) + A_{i2}\psi_{2n}(t) + \dots + A_{in}\psi_{nn}(t), \end{cases}$$

und die Determinante

$$|\psi_{ij}(t)|$$

ist nicht identisch gleich Null.

Nehmen wir nun an, dass $t = 0$ eine solche Stelle ist, in welcher diese Determinante *nicht* verschwindet. Es sei also

$$\Delta = |\psi_{ij}(0)| \neq 0.$$

Für $t = 0$ erhält man nun:

$$\begin{aligned} \psi_{i1}(2\pi) &= A_{i1}\psi_{11}(0) + A_{i2}\psi_{21}(0) + \dots + A_{in}\psi_{n1}(0), \\ \psi_{i2}(2\pi) &= A_{i1}\psi_{12}(0) + A_{i2}\psi_{22}(0) + \dots + A_{in}\psi_{n2}(0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{in}(2\pi) &= A_{i1}\psi_{1n}(0) + A_{i2}\psi_{2n}(0) + \dots + A_{in}\psi_{nn}(0). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist nach § 1 Formel (9):

$$\varDelta A_{i1} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{11}} \psi_{i1}(2\pi) + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{12}} \psi_{i2}(2\pi) + \ldots + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{1n}} \psi_{in}(2\pi),$$

$$\varDelta A_{i2} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{21}} \psi_{i1}(2\pi) + \frac{\partial \varDelta}{\partial \varphi_{22}} \psi_{i2}(2\pi) + \ldots + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{2n}} \psi_{in}(2\pi),$$

. . . .

$$\varDelta A_{in} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{n1}} \psi_{i1}(2\pi) + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{n2}} \psi_{i2}(2\pi) + \ldots + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{nn}} \psi_{in}(2\pi),$$

oder allgemein

$$(17) \qquad \varDelta A_{ij} = \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{j_1}} \psi_{i1}(2\pi) + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{j_2}} \psi_{i2}(2\pi) + \ldots + \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{jn}} \psi_{in}(2\pi).$$

Aus dieser Formel geht nach dem Multiplicationstheorem hervor, dass

$$\varDelta^n \left| A_{ij} \right| = \left| \frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{ij}} \right| \times \left| \psi_{ij}(2\pi) \right|.$$

Nun ist aber nach Formel (3) in § 1

$$\left| \frac{d \varDelta}{\partial \psi_{ij}} \right| = \varDelta^{n-1},$$

so dass

$$(18) \qquad \left| A_{ij} \right| = \frac{1}{\varDelta} \left| \psi_{ij}(2\pi) \right|.$$

Mittelst (17) sind die Coefficienten A_{ij} bestimmt, sofern die Grössen $\psi_{ij}(0)$ und $\psi_{ij}(2\pi)$ gegeben sind. Es erübrigt noch, diese Grössen zu finden.

Die Functionen ψ_{ij} bilden zusammen ein Fundamentalsystem von Integralen von (8). Ein solches Fundamentalsystem kann aber immer in der Form von Potenzreihen nach t gefunden werden. Diese Methode ist zwar in der Praxis nicht immer die bequemste; sie führt aber immer zum Ziel und ich werde unten an einem besonderen Beispiel einen anderen Weg zeigen, auf dem man in der Astronomie gewöhnlich schneller zum Ziel kommt.

Man kann also setzen

$$\psi_{ij}(t) = a_{ij} + b_{ij} t + c_{ij} t^2 + \ldots,$$

und die Coefficienten können durch Einsetzen in (8) in gewöhnlicher Weise bestimmt werden. Von diesen Coefficienten können $n(n-1)$ willkürlich gewählt werden. Wenn man demnach nun setzt:

$$(19)\qquad a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{,, } i = j \end{cases},$$

so wird

$$\varDelta = 1$$

und

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial \psi_{ij}} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{,, } i = j \end{cases}$$

und man bekommt also nach (17) für A_{ij} die einfache Formel

$$(20)\qquad A_{ij} = \psi_{ij}(2\pi).$$

Für die Aufstellung der Gleichung in s hat man also die Functionen $\psi_{ij}(2\pi)$ zu berechnen und es lautet nun die *Gleichung in s*

$$(21)\qquad G(s) = \begin{vmatrix} \psi_{11}(2\pi) - s, & \psi_{12}(2\pi), & \ldots, & \psi_{1n}(2\pi) \\ \psi_{21}(2\pi), & \psi_{22}(2\pi) - s, & \ldots, & \psi_{2n}(2\pi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{n1}(2\pi), & \psi_{n2}(2\pi), & \ldots, & \psi_{nn}(2\pi) - s \end{vmatrix} = 0.$$

Die Berechnung der Functionen $\psi_{ij}(t)$ für $t = 2\pi$ kann in verschiedener Weise ausgeführt werden, nur muss festgehalten werden, *dass man in Bezug auf diese Functionen die Voraussetzung gemacht hat, dass*

$$(19^*)\qquad \psi_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{,, } i = j \end{cases}.$$

§ 6. Beispiele zum vorigen Paragraphen.

Ich nehme an, dass wir nur zwei abhängige Veränderliche haben, so dass also die vorgelegten Gleichungen die folgenden sind:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi_{11}(t)\,x_1 + \varphi_{12}(t)\,x_2, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = \varphi_{21}(t)\,x_1 + \varphi_{22}(t)\,x_2. \end{cases}$$

In Bezug auf die Functionen φ, die periodisch in t sind mit der Periode 2π, wird nun ausserdem angenommen, dass φ_{11} und φ_{22} *ungerade*, φ_{12} und φ_{21} *gerade* Functionen von t sind. Es ist also

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_{11}(-t) = -\varphi_{11}(t), \; \varphi_{12}(-t) = +\varphi_{12}(t), \\ \varphi_{21}(-t) = +\varphi_{21}(t), \; \varphi_{22}(-t) = -\varphi_{22}(t). \end{cases}$$

Es lässt sich dann ein Fundamentalsystem von Integralen

$$x_1 = \psi_{11}(t), \; x_2 = \psi_{12}(t),$$
$$x_1 = \psi_{21}(t), \; x_2 = \psi_{22}(t)$$

finden von der Beschaffenheit, dass

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi_{11}(-t) = +\psi_{11}(t), \; \psi_{12}(-t) = -\psi_{12}(t), \\ \psi_{21}(-t) = -\psi_{21}(t), \; \psi_{22}(-t) = +\psi_{22}(t). \end{cases}$$

Man kann diese Integrale weiterhin so wählen, dass

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi_{11}(0) = 1, \; \psi_{12}(0) = 0, \\ \psi_{21}(0) = 0, \; \psi_{22}(0) = 1. \end{cases}$$

Die Coefficienten A_{ij} sind also gleich $\psi_{ij}(2\pi)$.

Die Relationen (9) § 5 lauten nun

$$\psi_{11}(t + 2\pi) = A_{11}\,\psi_{11}(t) + A_{12}\,\psi_{21}(t),$$
$$\psi_{12}(t + 2\pi) = A_{11}\,\psi_{12}(t) + A_{12}\,\psi_{22}(t),$$
$$\psi_{21}(t + 2\pi) = A_{21}\,\psi_{11}(t) + A_{22}\,\psi_{21}(t),$$
$$\psi_{22}(t + 2\pi) = A_{21}\,\psi_{12}(t) + A_{22}\,\psi_{22}(t).$$

Setzt man in diesen Gleichungen $t = -2\pi$, so erhält man in Betracht der Gleichungen (3) und (4)

$$1 = \quad A_{11}\,\psi_{11}(2\pi) - A_{12}\,\psi_{21}(2\pi),$$
$$0 = -A_{11}\,\psi_{12}(2\pi) + A_{12}\,\psi_{22}(2\pi)$$

und hieraus, weil $A_{ij} = \psi_{ij}(2\pi)$,

$$(5)\qquad \begin{cases} 1 = \psi_{11}(2\pi)\,\psi_{11}(2\pi) - \psi_{12}(2\pi)\,\psi_{21}(2\pi) \\ \psi_{11}(2\pi) = \psi_{22}(2\pi). \end{cases}$$

Aus (5) kann man eine wichtige Eigenschaft der *charakteristischen Exponenten* für diesen Fall ableiten.

Die Gleichung in s lautet nämlich

$$0 = \begin{vmatrix} \psi_{11}(2\pi) - s, & \psi_{12}(2\pi) \\ \psi_{21}(2\pi), & \psi_{22}(2\pi) - s \end{vmatrix}$$

oder

$$(6)\qquad s^2 - (\psi_{11} + \psi_{22})\,s + \psi_{11}\,\psi_{22} - \psi_{12}\,\psi_{21} = 0,$$

oder in Betracht der Gleichung (5)

$$(6^*)\qquad s^2 - 2\,\psi_{11}(2\pi)\,s + 1 = 0.$$

Setzt man nun

$$(7)\qquad s = e^{\sqrt{-1}\,2\alpha\pi},$$

so wird also α durch die folgende Gleichung bestimmt

$$(8)\qquad \cos 2\alpha\pi = \psi_{11}(2\pi).$$

Diese elegante Form zur Berechnung von α ist zuerst von CALLANDREAU angegeben für die Gleichung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_1 \cos 2t + \ldots)\,x = 0,$$

die eine grosse Rolle in neueren astronomischen Untersuchungen spielt und offenbar ein Specialfall von (1) ist.

So oft nun der absolute Betrag von $\psi_{11}(2\pi)$ kleiner als Eins ist, bekommt man aus (8) einen *reellen* Werth für α. Eine durch (1) definirte Bewegung wird dann *stabil* ausfallen.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = (-1 + b \cos t)\, x \tag{9}$$

ist ein Specialfall von (1). Setzt man nämlich

$$x_1 = x\,; \; x_2 = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\,,$$

so erhält man statt (9)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2\,, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (-1 + b \cos t)\, x_1\,; \end{aligned} \right. \tag{9*}$$

es ist also in diesem Falle

$$\varphi_{11} = 0\,; \qquad \varphi_{12} = 1\,,$$
$$\varphi_{21} = -1 + b \cos t\,; \quad \varphi_{22} = 0\,.$$

Die Bedingungen (2) für die Functionen φ sind also erfüllt, und zur Bestimmung von α kann man die Formel (8) benutzen. Es gilt nun die Function $\psi_{11}(2\pi)$ zu berechnen.

$$x_1 = \psi_{11}(t)\,; \qquad x_2 = \psi_{12}(t)$$

sollen zusammen ein Integral von (9*) bilden und dabei ist angenommen, dass ψ_{11} eine gerade, ψ_{12} eine ungerade Function von t ausmachen und ausserdem ist

$$\psi_{11}(0) = 1\,; \qquad \psi_{12}(0) = 0\,.$$

Da in diesem Falle

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}\,,$$

so sind diese Bedingungen von selbst erfüllt, *wenn nur $\psi_{11}(t)$ eine gerade Function ist und $\psi_{11}(0) = 1$.*

Es genügt also ein Integral zu (9) zu suchen, welches diese Bedingungen erfüllt. Am nächsten liegt es, das Problem durch

eine *Potenzreihe nach t zu lösen.* **Man setzt zu diesem Zweck** in (9)

$$x = 1 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^4 + \alpha_3 t^6 + \dots$$

Die Recursionsformel für die Coefficienten wird

$$(2n+2)(2n+1)\alpha_{n+1} = -\alpha_n$$
$$+ b\left[\alpha_n - \frac{\alpha_{n-1}}{\underline{|2}} + \frac{\alpha_{n-2}}{\underline{|4}} - \dots + \frac{(-1)^n}{\underline{|2n}}\alpha_0\right].$$

Bis zur vierten Potenz hat man also

$$(10) \qquad x = \psi_{11}(t) = 1 + \frac{1}{2}(-1+b)t^2 + \frac{1}{24}(1 - 3b + b^2)t^4 + \dots$$

Da die Reihe beständig convergent ist, so kann man natürlich immer mittelst dieser Reihe $\psi_{11}(2\pi)$ berechnen. Die Berechnung wird aber sehr mühsam, und nur für ziemlich grosse Werthe von b wäre diese Berechnungsmethode zu empfehlen. Es lässt sich auch nicht in dieser Weise entscheiden, ohne für b einen *numerisch* bestimmten Werth anzunehmen, ob der nach (8) berechnete Werth von α reell oder imaginär ausfällt. Man muss sich deswegen in der Praxis nach anderen Methoden umsehen.

In den astronomischen Anwendungen dieser Gleichung ist b im Allgemeinen eine kleine Zahl, und dieses Umstandes kann man sich bedienen, um den Werth von α zu berechnen. Dieser Weg ist auch deswegen von Interesse, weil er zeigt, wie man sich einer „Entwickelung nach den Potenzen der Massen" bedienen kann, um allgemeiner gültige Integrale zu erhalten.

Wir nehmen also an, dass das Integral von (9) nach den Potenzen von b entwickelt werden kann und setzen

$$x = X_0 + bX_1 + b^2X_2 + \dots$$

Beim Einsetzen dieses Ausdruckes in (8) zerfällt die zu untersuchende Gleichung in die folgenden Gleichungen

$$\frac{d^2 X_0}{d t^2} = - X_0,$$

$$\frac{d^2 X_1}{d t^2} = - X_1 + \cos t X_0,$$

$$\frac{d^2 X_2}{d t^2} = - X_2 + \cos t X_1,$$

u. s. w., und wir haben ein Integral zu diesen Gleichungen aufzusuchen, das *gerade* ist und für $t = 0$ gleich der Einheit wird.

Man bekommt nun nach einander, wenn wir überall einen willkürlichen Factor vorläufig weglassen,

$$X_0 = \cos t,$$

$$X_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2t,$$

$$X_2 = \frac{5}{24} t \sin t + \frac{1}{96}\cos 3t,$$

$$X_3 = -\frac{5}{144} t \sin 2t,$$

$$-\frac{83}{1728}\cos 2t - \frac{1}{2880}\cos 4t,$$

$$X_4 = \frac{5}{1152} t^2 \cos t - \frac{113}{6912} t \sin t,$$

$$+\frac{5}{2304} t \sin 3t + \frac{643}{138240}\cos 3t,$$

$$+\frac{1}{138240}\cos 5t.$$

Es ist also

$$\psi_{11}(t) = x = A\left\{\cos t + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2t\right) + \right.$$

$$+ b^2\left(\frac{5}{24} t \sin t + \frac{1}{96}\cos 3t\right) +$$

$$\left. + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \right\}$$

Hieraus folgt nun:

$$\psi_{11}(0) = 1 = A\left\{1 + \frac{1}{3} b + \frac{1}{96} b^2 - \frac{418}{8640} b^3 + \frac{644}{138240} b^4 + \dots\right\},$$

$$\psi_{11}(2\pi) = A\left\{1 + \frac{1}{3}b + \frac{1}{96}b^2 - \frac{418}{8640}b^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{1152}(2\pi)^2 + \frac{644}{138240}\right)b^4 + \ldots\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die erste Gleichung bekommt man also

$$\psi_{11}(2\pi) = 1 + A\frac{5}{1152}(2\pi)^2 b^4 + \ldots$$

Da

$$A = 1 - \frac{1}{3}b + \ldots,$$

so hat man

$$\cos 2\alpha\pi = 1 + \frac{5}{1152}(2\pi)^2 b^4 + \ldots \tag{11}$$

Es wird mithin in diesem Falle $\cos 2\alpha\pi$ grösser als die Einheit, und α also imaginär.

In den astronomischen Anwendungen dieser Gleichung ist b im Allgemeinen mit der Masse der „störenden" Planeten multiplicirt und es ist bemerkenswerth, dass man in diesem Fall bis zur *vierten* Potenz der Masse gehen muss, um die Abweichung der Function $\psi_{11}(2\pi)$ von der Einheit zu finden.

Wenn statt (9) die folgende Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (-n^2 + b\cos t)x, \tag{12}$$

wo n *keine ganze Zahl bedeutet*, vorläge, so braucht man die Entwickelungen nicht so weit zu führen. Die Lösung, welche dem Integral $\psi_{11}(t)$ entspricht, wird hier, nach Potenzen von b entwickelt,

$$x = X_0 + bX_1 + b^2X_2 + \ldots,$$

wo

$$X_0 = \cos nt,$$

$$X_1 = \frac{\cos(1-n)t}{2[n^2-(1-n)^2]} + \frac{\cos(1+n)t}{2[n^2-(1+n)^2]},$$

$$X_2 = \frac{1}{2n}t\sin nt\left[\frac{1}{4[n^2-(1-n)^2]} + \frac{1}{4[n^2-(1+n)^2]}\right]$$

$$+ \frac{\cos(2-n)t}{4[n^2-(2-n)^2][n^2-(1-n)^2]} + \frac{\cos(2+n)t}{4[n^2-(2+n)^2][n^2-(1+n)^2]}.$$

Nimmt man nun auf die Gleichung

$$\psi_{11}(0) = 1$$

Rücksicht, so bekommt man

$$\cos 2\pi\alpha = \psi_{11}(2\pi) = \cos 2n\pi + \sin 2n\pi \frac{b^2\pi}{2n(4n^2-1)} + \ldots$$

einen Ausdruck, der kleiner als die Einheit ist. Setzt man nun

$$\alpha = n(1-\sigma),$$

so wird

$$\sigma = \frac{b^2}{4n^2(4n^2-1)}, \tag{13}$$

übereinstimmend mit dem Resultat von LINDSTEDT in seinen bekannten Untersuchungen über diese Differentialgleichung („Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen in der Störungstheorie". Mémoires de l'Acad. de St. Pétersbourg 1883).

Das allgemeine Integral (12) lautet nun ((11) § 5)

$$x = C_1 e^{\sqrt{-1}\,n(1-\sigma)t}\lambda_1(t) + C_2 e^{-\sqrt{-1}\,n(1-\sigma)t}\lambda_2(t), \tag{14}$$

wo λ_1 und λ_2 *periodische* Functionen von t bezeichnen. Man kann auch mit LINDSTEDT dies Integral in folgender Form schreiben

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty}\mu_i \cos[w + it], \tag{14*}$$

wo

$$w = n(1-\sigma)t + \pi,$$

und π eine Integrationconstante bezeichnet. —

§ 7. Die Bewegungsgleichungen von LAGRANGE.

Die Bewegung eines Systems von n *freien* Körpern, mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, wird, bezogen auf ein absolutes Coordinatensystem, durch $3n$ Gleichungen bestimmt:

$$
(1) \qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{d t^2} = X_i\,, \\[2ex] m_i \dfrac{d^2 y_i}{d t^2} = Y_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] m_i \dfrac{d^2 z_i}{d t^2} = Z_i\,. \end{cases}
$$

Sehr selten werden nun diese Gleichungen direct für die Untersuchung angewandt. Im Allgemeinen wird es nothwendig oder angemessen sein, die absoluten Coordinaten x_i, y_i, z_i gegen andere Veränderliche, etwa $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$, zu vertauschen mittelst Relationen, in welche die Zeit auch eingehen kann. Die Aufstellung der für die neuen Veränderlichen q_i gültigen Differentialgleichungen wird nun mehr oder weniger umständlich, und diese Rechenarbeit wird durch eine von LAGRANGE gefundene, allgemeine Form für die Bewegungsgleichungen in den meisten Fällen bedeutend vereinfacht.

Wir nehmen also an, dass

$$
(2) \qquad x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n};\ t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
$$

Werden nun die drei Gleichungen (1) mit $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$, $\dfrac{\partial y_i}{\partial q_j}$ und $\dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}$ multiplicirt und alle Gleichungen addirt, so wird

$$
\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{d t^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{d^2 y_i}{\partial t^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 z_i}{d t^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right),
$$

wo j nach einander die Werthe $1, 2, \ldots, 3n$ annimmt.

Diese Gleichung kann man schreiben

$$
(3) \qquad \frac{d P_j}{d t} - Q_j = R_j,
$$

wo

$$
P_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d x_i}{d t} \, \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{d y_i}{d t} \, \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{d z_i}{d t} \, \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right),
$$

$$
Q_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d x_i}{d t} \, \frac{d \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}}{d t} + \frac{d y_i}{d t} \, \frac{d \dfrac{\partial y_i}{\partial q_j}}{d t} + \frac{d z_i}{d t} \, \frac{d \dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}}{d t} \right).
$$

$$
R_j = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).
$$

Führt man nun *die lebendige Kraft* T ein:

$$(4)\qquad T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left[\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z_i}{d t}\right)^2\right],$$

so lässt sich zeigen, dass

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial q_j'},$$

$$Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$q'_j = \frac{d q_j}{d t}.$$

Es ist in der That

$$(5)\qquad x_i' = \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial x_i}{d q_1} q_1' + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}} q_{3n}' + \frac{\partial x}{\partial t},$$

woraus

$$(6)\qquad \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Denken wir uns nun in T die Ausdrücke (2) und (5) eingesetzt, so wird T eine Function von $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$; $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$ und t, und es wird nun

$$\frac{\partial T}{\partial q_j'} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_j'} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_j'} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_j'}\right),$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + y_i'\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + z_i'\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \quad \text{nach (6)}$$

$$= P_j.$$

Es ist weiter

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_j} + y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_j} + z_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_j}\right).$$

Nun ist aber nach (5)

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_j} q_1' + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_{3n}\partial q_j} q_{3n}' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}$$

und andererseits nach (2)

$$\frac{d\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}}{dt} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1} q_1' + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_{3n}} q_{3n}' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial x_i'}{\partial p_j}$$

und folglich

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Man hat also nach (3)

$$(7) \qquad \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_j'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n),$$

welche Gleichungen die von LAGRANGE gefundene Form der Differentialgleichungen für die Bewegung von n freien Körpern enthalten.

Existirt eine „Kräftefunction“ U, so dass

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so lauten die Gleichungen von LAGRANGE

$$(8) \qquad \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_j'}}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Die Bewegungsgleichungen von LAGRANGE haben den formalen Vortheil, dass man nur die lebendige Kraft T durch die neuen Coordinaten, welche man statt der absoluten einführt, auszudrücken braucht, um danach durch eine einfache (partielle) Differentiation zu den Differentialgleichungen für die neuen Veränderlichen zu gelangen.

Die Differentialgleichungen (7) [und (8)] lassen sich immer in Bezug auf q_j'' lösen, so oft nämlich die $3n$ Substitutionsgleichungen (2) von einander unabhängig sind,[1] d. h. so oft die Functionaldeterminante der alten Coordinaten in Bezug auf die neuen von Null verschieden ist.

Um dies zu beweisen, setzen wir

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

[1] Siehe PAINLEVÉ: „Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique.“

wo die drei Glieder rechter Seite homogene Functionen von q_1', $q_2', \ldots, q_{3n}'$ sind, beziehungsweise von dem Grade 2, 1, 0.

Gesetzt also

$$T_2 = \sum \alpha_{ij} q_i' q_j',$$

wo α_{ij} nur von $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ und t abhängen, so wird

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_j'} = 2 \sum_{i=1}^{3n} \alpha_{ij} q_i'$$

und also

$$\frac{d \frac{\partial T}{\partial q_j'}}{d t} = 2 \sum \alpha_{ij} q_i'' + A,$$

wo A solche Glieder bezeichnet, die den zweiten Differentialquotienten von q_i nicht enthalten.

Hieraus erhellt, dass die Gleichungen (7) sich in Bezug auf q_i'' auflösen lassen, so oft

$$(9) \qquad | \alpha_{ij} | \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Man kann aber leicht den Ausdruck für diese Determinante finden. Setzen wir, um die Schreibweise zu vereinfachen,

$$y_1 = x_{n+1}, \; y_2 = x_{n+2}, \; \ldots, \; y_n = x_{2n},$$

$$z_1 = x_{2n+1}, \; z_2 = x_{2n+2}, \; \ldots, \; z_n = x_{3n},$$

so dass $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$ die absoluten Coordinaten bezeichnen, so wird

$$2 T_2 = \sum_{k=1}^{3n} m_k \left[\frac{d x_k}{d t}\right]^2,$$

wo

$$\left[\frac{d x_k}{d t}\right] = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_{3n}} q_{3n}'.$$

Hieraus bekommt man

$$\left[\frac{d x_k}{d t}\right]^2 = \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} q_i' q_j'.$$

Es ist also

$$(10) \qquad 2 \alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{3n} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

wo ich der Symmetrie wegen gesetzt habe

$$m_{n+1} = m_{2n+1} = m_1\,; \qquad m_{n+2} = m_{2n+2} = m_2$$

u. s. w.

Bildet man nun die Determinante

$$| \alpha_{ij} |$$

und setzt die Ausdrücke für α_{ij} aus (10) hier hinein, so findet man mit Hilfe des Multiplicationstheorems, dass

$$(11) \qquad 2^{3n} \left| \alpha_{ij} \right| = m_1 m_2 \ldots m_{3n} \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right|^2 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 3n).$$

Sind die Relationen zwischen den absoluten Coordinaten (x_i) und den neuen (q_i) von einander unabhängig, so ist

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right| \neq 0,$$

und dann ist auch die Gleichung (9) erfüllt. Und dies war zu beweisen.

Als Anwendungen der Lagrange'schen Formel werde ich einige Beispiele behandeln, die später zur Anwendung kommen.

Beispiel 1. *Einführung von Polarcoordinaten statt rechtwinkliger Coordinaten.*

Gesetzt

$$x = r \cos\varphi \cos\theta,$$

$$y = r \cos\varphi \sin\theta,$$

$$z = r \sin\varphi,$$

so dass

$$x' = r' \cos\varphi \cos\theta - r \sin\varphi \cos\theta \cdot \varphi' - r \cos\varphi \sin\theta \cdot \theta',$$

$$y' = r' \cos\varphi \sin\theta - r \sin\varphi \sin\theta \cdot \varphi' + r \cos\varphi \cos\theta \cdot \theta',$$

$$z' = r' \sin\varphi + r \cos\varphi \cdot \varphi',$$

so bekommt man

$$(12) \qquad 2T = \sum m \left(r'^2 + r^2 \varphi'^2 + r^2 \cos^2\varphi \cdot \theta'^2\right)$$

und nach der Formel von Lagrange sind also die Bewegungsgleichungen in Polarcoordinaten

$$(13)\quad\begin{cases}\sum m\left(\dfrac{d^2 r}{d t^2}-r\varphi'^2-r\cos^2\varphi\,\theta'^2\right)=R_1,\\[2ex] \sum m\qquad\dfrac{d\,r^2\cos^2\varphi\cdot\theta'}{d t}\qquad=R_2,\\[2ex] \sum m\left(\dfrac{d\,r^2\varphi'}{d t}+r^2\sin\varphi\cos\varphi\,\theta'^2\right)=R_3.\end{cases}$$

Beispiel 2. *Drehung des Coordinatensystems um einen constanten Winkel.* Es ist

$$(14)\quad\begin{cases}x=\alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\zeta,\\ y=\beta_1\xi+\beta_2\eta+\beta_3\zeta,\\ z=\gamma_1\xi+\gamma_2\eta+\gamma_3\zeta,\end{cases}$$

wo

$$(15)\quad\begin{cases}1=\sum\alpha^2=\sum\beta^2=\sum\gamma^2,\\ 0=\sum\beta\gamma=\sum\gamma\alpha=\sum\alpha\beta.\end{cases}$$

Da α, β, γ von der Zeit unabhängige Grössen sind, so wird nun

$$x'=\alpha_1\xi'+\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta'$$

u. s. w. und somit

$$\sum(x'^2+y'^2+z'^2)=\sum(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2).$$

Die Form der Differentialgleichungen (1) bleibt also bei diesem Coordinatenwechsel unverändert.

Beispiel 3. *Die „idealen" Coordinaten von* HANSEN.

Wenn die Coefficienten α, β, γ in (14) von der Zeit abhängig sind, so hat man

$$(16)\quad\begin{cases}x'=\alpha_1\xi'+\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta'+\xi\alpha_1'+\eta\alpha_2'+\zeta\alpha_3',\\ y'=\beta_1\xi'+\beta_2\eta'+\beta_3\zeta'+\xi\beta_1'+\eta\beta_2'+\zeta\beta_3',\\ z'=\gamma_1\xi'+\gamma_2\eta'+\gamma_3\zeta'+\xi\gamma_1'+\eta\gamma_2'+\zeta\gamma_3'.\end{cases}$$

Zwischen den Grössen α, β, γ bestehen nun die 6 Relationen (15), und durch Differentiation bekommt man noch 6 Bedingungsgleichungen zwischen den Differentialquotienten der Coefficienten, nämlich

$$(17)\quad\begin{cases}0=\sum\alpha\alpha'=\sum\beta\beta'=\sum\gamma\gamma',\\ 0=\sum\beta'\gamma+\sum\beta\gamma'=\sum\gamma'\alpha+\sum\gamma\alpha'=\sum\alpha'\beta+\sum\alpha\beta'.\end{cases}$$

HANSEN unterwirft die Drehungswinkel noch den Bedingungen

$$(18)\quad\begin{cases}0=\xi\alpha_1'+\eta\alpha_2'+\zeta\alpha_3',\\ 0=\xi\beta_1'+\eta\beta_2'+\zeta\beta_3',\\ 0=\xi\gamma_1'+\eta\gamma_2'+\zeta\gamma_3'.\end{cases}$$

Die so bestimmten Coordinaten nennt er *ideale*.

Es wird nun

$$x' = \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta'.$$

$$y' = \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta',$$

$$z' = \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta'.$$

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten sind also für ideale Coordinaten dieselben wie für Coordinaten, die auf ein festes Coordinatensystem bezogen sind. Es wird nun

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

Die Differentialgleichungen für die idealen Coordinaten sind also von derselben Form wie für die absoluten Coordinaten.

Für jeden Werth der Zeit haben die Differentialquotienten α' u. s. w. einen bestimmten Werth. Die Gleichungen (18) bestimmen also in jedem Augenblicke eine gerade Linie, welche bei einer unendlich kleinen Drehung eine unveränderliche Lage beibehält. Diese gerade Linie fällt mit dem Radiusvector zusammen. In der That muss sie durch den Ort des beweglichen Körpers gehen, da dessen Coordinaten den Gleichungen (18) genügen. Die Linie geht auch durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Bei den idealen Hansen'schen Coordinaten ist also die Bewegung des Coordinatensystems durch eine Drehung desselben um den Radiusvector charakterisirt.

Die Gleichungen (18) können in folgender Form geschrieben werden:

$$0 = C\eta - B\zeta,$$

$$0 = A\zeta - C\xi,$$

$$0 = B\xi - A\eta,$$

wo

$$A = \alpha_2 \alpha_3' + \beta_2 \beta_3' + \gamma_2 \gamma_3',$$

$$B = \alpha_3 \alpha_1' + \beta_3 \beta_1' + \gamma_3 \gamma_1',$$

$$C = \alpha_1 \alpha_2' + \beta_1 \beta_2' + \gamma_1 \gamma_2'.$$

Beispiel 4. *Drehung des Coordinatensystems in der Ebene um einen von der Zeit abhängigen Winkel.*

Wenn die Drehung in der xy-Ebene vor sich geht und der von der Zeit abhängige Winkel mit v bezeichnet wird, so hat man

$$x = \xi \cos v - \eta \sin v,$$

$$y = \xi \sin v + \eta \cos v,$$

und es wird nun

$$(19) \qquad 2T = \sum m \left[\xi'^2 + \eta'^2 + 2\frac{dv}{dt}(\xi\eta' - \xi'\eta) + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2(\xi^2 + \eta^2)\right].$$

Die Differentialgleichungen für die neuen Coordinaten werden

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2\dfrac{dv}{dt}\eta' - \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2\xi - \dfrac{d^2v}{dt^2}\eta = \dfrac{1}{m}R_1, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\dfrac{dv}{dt}\xi' - \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2\eta + \dfrac{d^2v}{dt^2}\xi = \dfrac{1}{m}R_2. \end{cases}$$

Es kommt öfters vor, dass man sich eines Coordinatensystems bedient, das sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit im Raume bewegt. Bei einem solchen ist

$$\frac{dv}{dt} = \text{Constante} = n,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 0,$$

und die obigen Differentialgleichungen lauten

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\dfrac{d\eta}{dt} - n^2\xi = \dfrac{1}{m}R_1, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\dfrac{d\xi}{dt} - n^2\eta = \dfrac{1}{m}R_2, \end{cases}$$

Wollte man in diesem beweglichen Coordinatensystem Polarcoordinaten anwenden, so dass

$$\xi = \varrho\cos\theta,$$

$$\eta = \varrho\sin\theta,$$

so hat man

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \varrho'^2 + \varrho^2\theta'^2,$$

$$\xi\eta' - \xi'\eta = \varrho^2\theta',$$

und somit

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \varrho'^2 + \varrho^2\theta'^2 + 2n\varrho^2\theta' + n^2\varrho^2,$$

und man hat nun

$$\frac{\partial T}{\partial \varrho'} = \varrho',$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varrho} = \varrho\theta'^2 + 2n\varrho\theta' + n^2\varrho = \varrho(\theta' + n)^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \varrho^2\theta' + n\varrho^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

und demnach nach der Formel von LAGRANGE

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho(\theta' + n)^2 = \dfrac{1}{m} R_1, \\[2ex] \dfrac{d\varrho^2(\theta' + n)}{dt} \quad = \dfrac{1}{m} R_2. \end{cases}$$

Theorem von LIOUVILLE. Es giebt, wie LIOUVILLE gezeigt hat, einen allgemeinen Fall, in welchem sich die Differentialgleichungen von LAGRANGE integriren lassen (bez. auf Quadratur zurückgeführt werden können).

Sind nämlich k Coordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ vorhanden, und ist die lebendige Kraft T von der folgenden Form

$$(23)\qquad 2T = \varphi\,[A_1(q_1)\,q_1'^2 + \ldots + A_k(q_k)\,q_k'^2],$$

wo

$$(24)\qquad \varphi = \varphi_1(q_1) + \ldots + \varphi_k(q_k),$$

so kann das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt werden, so oft eine Kräftefunction U existirt von der Beschaffenheit, dass

$$(25)\qquad U = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi_1(q_1) + \ldots + \psi_k(q_k)}{\varphi_1(q_1) + \ldots + \varphi_k(q_k)}.$$

Die Integrale sind dann

$$(26)\qquad \int\sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\,dq_1 + \beta_1 = \ldots = \int\sqrt{\frac{A_k}{F_k}}\,dq_k + \beta_k,$$

$$(27)\qquad \sqrt{2}\,t + C = \int\varphi_1\sqrt{\frac{A_1}{F_1}}\,dq_1 + \ldots + \int\varphi_k\sqrt{\frac{A_k}{F_k}}\,dq_k,$$

wo

$$(28)\qquad F_i = \psi_i(q_i) + h\,\varphi_i(q_i) + \alpha_i.$$

Hier besteht zwischen den Grössen α_i die Relation

$$(29)\qquad \sum\alpha_i = 0,$$

und die $2k$ Integrationsconstanten sind somit

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, h,$$

$$\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, C.$$

Um dies zu beweisen, setzen wir[1]

(30) $$\sqrt{A_i(q_i)}\,d q_i = d u_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Denkt man sich diese Gleichungen integrirt, und q durch u ausgedrückt und die Werthe in φ und ψ eingesetzt, so kann man setzen

$$\varphi_i(q) = f_i(u),$$

$$\psi_i(q) = g_i(u)$$

und es wird nun

$$2T = f[u_1'^2 + \ldots + u_k'^2]$$

$$U = \frac{g}{f} = \frac{g_1(u_1) + \ldots + g_k(u_k)}{f_1(u_1) + \ldots + f_k(u_k)}.$$

Die Gleichungen von LAGRANGE für diese Grössen u_i lauten

(31) $$\frac{d f u_i'}{d t} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i}\sum u_i'^2 = \frac{\partial U}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit u_i' und addirt, so bekommt man das *Integral der lebendigen Kraft*

(32) $$T = \frac{1}{2} f(u_1'^2 + \ldots + u_k'^2) = U + h.$$

Wenn man nun (31) mit $2fu_i'$ multiplicirt und (32) berücksichtigt so wird

$$\frac{d f^2 u_i'^2}{d t} - 2u_i'\frac{\partial f}{\partial u_i}(U + h) = 2u_i' f\frac{\partial U}{\partial u_i}$$

oder

$$\frac{d f^2 u_i'^2}{d t} = 2u_i'\frac{\partial f(U+h)}{\partial u_i},$$

oder da

$$fU = g,$$

$$\frac{d f^2 u_i'^2}{d t} = 2u_i'\frac{\partial (g + hf)}{\partial u_i} = 2u_i'\frac{d(g_i + hf_i)}{d u_i},$$

oder

$$\frac{d f^2 u_i'^2}{d t} = 2\frac{d(g_i + hf_i)}{d t}.$$

Man bekommt also

(33) $$f^2 u_i'^2 = 2(g_i + hf_i + \alpha_i).$$

[1] Siehe PAINLEVÉ, a. a. O. S. 108.

Hieraus folgt durch Summiren

$$\begin{aligned}\sum f^2 u_i'^2 = 2fT &= 2\sum(g_i + hf_i + \alpha_i)\\ &= 2g \quad + 2hf + 2\sum\alpha_i\\ &= 2fU + 2hf + 2\sum\alpha_i\\ &= 2f(U+h) \quad + 2\sum\alpha_i\end{aligned}$$

d. h. nach (32)

$$\sum\alpha_i = 0.$$

Nach (33) ist nun

$$\frac{du_i}{\sqrt{g_i + hf_i + \alpha_i}} = \frac{\sqrt{2}\,dt}{f}.$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichung mit f_i und addirt die Gleichungen, die man erhält, indem man $i = 1, 2, \ldots, k$ setzt, so hat man

$$\sum\frac{f_i\,du_i}{\sqrt{g_i + hf_i + \alpha_i}} = \sqrt{2}\,dt,$$

Führt man in diese Gleichungen q_i statt u_i wieder ein, so so ist damit das Theorem von Liouville bewiesen.

Das bekannteste Beispiel der Anwendung dieses Theorems ist das klassische Problem der *Bewegung eines Punktes, der von zwei festen Centra attrahirt wird.* Da ich in einem folgenden Abschnitt diesem Problem eine besondere Aufmerksamkeit widmen will, so will ich hier gleich einige einleitende Bemerkungen über dasselbe machen.

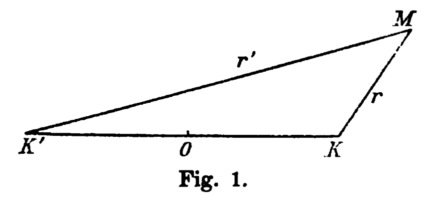


Fig. 1.

Ich begnüge mich damit, die Bewegung in einer Ebene zu betrachten.

Es handelt sich um die Bewegung eines Körpers (M), der von zwei *festen* Massen (K und K') nach dem Newton'schen Gesetz attrahirt wird.

Das Problem ist von altem Datum und ist zuerst von Euler integrirt worden (Mém. de l'Acad. de Berlin 1760); am vollständigsten wurde es von Legendre im ersten Theil seiner „Traité des fonctions elliptiques" behandelt.

Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in den Mittelpunkt der Linie $KK' = 2c$, die X-Achse gegen K gerichtet.

Die Kräftefunction lautet

$$U = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'}, \tag{34}$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{35}$$

Hieraus bekommt man das Integral der lebendigen Kraft

$$T = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = U + h = \frac{K}{r} + \frac{K'}{r'} + \frac{D}{c}, \tag{36}$$

wo D eine Integrationsconstante bezeichnet.

Um das Problem auf eine Quadratur zurückzuführen, führt EULER zwei Veränderliche p und q ein, der Art, dass

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = p q; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{q}{p},$$

wo φ und ω die Winkel, welche r und r' mit der positiven Richtung der X-Achse bilden, bezeichnen.

Es hat sich indessen als vortheilhafter erwiesen, andere Veränderliche einzuführen, die, so viel ich weiss, zuerst von JACOBI benutzt worden sind. Es sind dies die sogen. *elliptischen Coordinaten.* Nennen wir diese λ und μ, so ist ihre Definition

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(r + r'), \\ \mu &= \frac{1}{2}(r - r'). \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Die erstere Gleichung bezeichnet für einen *constanten* Werth von λ eine Ellipse, deren halbe grosse Achse gleich λ ist, die letztere für constantes μ eine Hyperbel mit der halben grossen Achse gleich μ. Beide Curven haben in K und K' ihre beiden Foci.

Zu jedem λ gehört eine bestimmte Ellipse, zu jedem Werth von μ eine bestimmte Hyperbel.

Der *kleinste* Werth für $r + r'$ ist $2c$. Demnach ist immer

$$\lambda \geqq c.$$

Der grösste Werth für $r - r'$ ist $2c$, so dass

$$|\mu| \leqq c \gtreqless \lambda. \tag{38}$$

Bekanntlich theilt die *Tangente* in einem Punkt einer Hyperbel den Winkel zwischen den Radien r, r' in zwei gleiche Theile, und das ähnliche findet bei der Normale in einem Punkt einer Ellipse statt. Hieraus folgt, dass die durch (37) bestimmten Ellipsen und Hyperbeln sich unter einem *geraden* Winkel schneiden. Die elliptischen Coordinaten λ und μ nennt man deswegen *orthogonal.*

Da λ die halbe grosse Achse der Ellipse ist, so hat die halbe kleine Achse den Ausdruck

$$\sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

und die halbe kleine Achse in der Hyperbel ist

$$\sqrt{c^2 - \mu^2},$$

so dass die Gleichungen der Curven die folgenden sind:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} &= 1. \end{aligned} \right. \tag{39}$$

Hieraus bekommt man

$$\left\{ \begin{aligned} c^2 x^2 &= \lambda^2 \mu^2, \\ c^2 y^2 &= (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2), \end{aligned} \right. \tag{40}$$

und hieraus durch logarithmische Differentiation

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 - c^2} - \frac{\mu\, d\mu}{c^2 - \mu^2},$$

oder

$$c\, dx = \mu\, d\lambda + \lambda\, d\mu,$$

$$c\, dy = \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}}\, \lambda\, d\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}\, \mu\, d\mu.$$

Folglich ist

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} d\lambda^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} d\mu^2,$$

und also

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,v = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right]. \tag{41}$$

Die Kräftefunction wird, durch die elliptischen Coordinaten ausgedrückt,

$$U = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}\left((K + K')\lambda - (K - K')\mu\right). \tag{42}$$

Aus (41) und (42) ist unmittelbar ersichtlich, dass T und U die Form haben, die für die Anwendung des Theorems von LIOUVILLE erforderlich ist. Die Integrale können somit direct aufgeschrieben werden.

In den Formeln (23) u. s. w. hat man nun zu schreiben

$$\varphi = \lambda^2 - \mu^2, \quad A_1 = \frac{1}{\lambda^2 - c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{c^2 - \mu^2};$$

$$\varphi_1 = \lambda^2, \quad \varphi_2 = -\mu^2;$$

$$\psi_1 = (K + K')\lambda, \quad \psi_2 = -(K - K')\mu.$$

Es wird also

$$F_1 = \quad (K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha,$$

$$F_2 = -(K - K')\mu - h\mu^2 - \alpha$$

und die gesuchten Gleichungen werden endlich:

$$(43)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(h\lambda^2 + (K + K')\lambda + \alpha)}} - \dfrac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(h\mu^2 + (K - K')\mu + \alpha)}}, \\ \sqrt{2}\,dt = \dfrac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(h\lambda^2 + (K + K')\lambda + \alpha)}} - \dfrac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - c^2)(h\mu^2 + (K - K')\mu + \alpha)}}. \end{cases}$$

Bei der Integration erhält man hier zwei Integrationsconstanten, die beiden übrigen sind h und α.

Ich werde in einem folgenden Abschnitt die Integration dieser Gleichungen ausführen. Es wird sich dabei zeigen, dass λ und μ als vierfach periodische Functionen zweier Argumente dargestellt werden können.

Ein anderes Beispiel des Theorems von LIOUVILLE liefert *das Problem der zwei Körper in der Ebene.* Es ist dann (Formel (12))

$$T = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r'^2}{r^2} + \theta'^2 \right),$$

$$U = \frac{K}{r} = \frac{1}{r^2} \cdot K r .$$

In den Formeln (23) u. s. w. hat man zu setzen

$$\varphi = r^2, \quad \varphi_1 = r^2, \quad \varphi_2 = 0;$$

$$\psi = K r, \quad \psi_1 = K r, \quad \psi_2 = 0;$$

$$A_1 = \frac{1}{r^2}, \quad A_2 = 1 .$$

Die Formeln (26) und (27) lauten in diesem Fall:

$$\frac{d r}{r \sqrt{h r^2 + K r + \alpha}} = \frac{d \theta}{\sqrt{-\alpha}},$$

$$\frac{r\, d r}{\sqrt{h r^2 + K r + \alpha}} = \sqrt{2}\, d t .$$

§ 8. Canonische Bewegungsgleichungen.

Wenn man in die LAGRANGE'schen Gleichungen

$$\frac{d \frac{\partial T}{\partial q_i'}}{d t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = R_i \quad (i = 1, 2, \ldots . k) \tag{1}$$

statt q_i' eine neue Veränderliche p_i einführt, so dass

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

so werden die neuen abhängigen Veränderlichen $q_1, q_2, \ldots, q_k$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *canonische Coordinaten* genannt. Sie werden durch ein in formeller Hinsicht sehr einfaches System von Differentialgleichungen bestimmt, welches man in folgender Weise finden kann.

Statt (1) haben wir

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d p_i}{d t} = \dfrac{\partial T}{\partial q_i} + R_i, \\ \dfrac{d q_i}{d t} = q_i'. \end{cases}$$

Wenn man aus (2) q' als eine Function von $q_1, \ldots q_k$; $p_1, \ldots, p_k$ und eventuell auch von t darstellt — was sich immer ausführen lässt, da, wie schon bewiesen worden ist, die Determinante der Coefficienten der q_i' in der rechten Seite von (2) von Null verschieden ist — so gehen die rechten Seiten von (3) in Functionen von p und q und eventuell von t über.

Diese Elimination, scheinbar complicirt, wird durch Einführung einer Function K

$$(4)\qquad K = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_k q_k' - T$$

vereinfacht. Wir denken uns dabei in der rechten Seite dieses Ausdruckes $q_1'. \ldots q_k'$ mit Hilfe der Gleichungen (2) eliminirt und durch $p_1. \ldots p_k$ ausgedrückt, so dass K eine Function von $p_1, \ldots p_k$; $q_1, \ldots, q_k$ (und t) wird.

Aus dem Ausdruck für K folgt nun:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = q_i' + p_1 \frac{\partial q_1'}{\partial p_i} + \cdots + p_k \frac{\partial q_k'}{\partial p_i} - \frac{\partial T}{\partial q_1'}\frac{\partial q_1'}{\partial p_i} - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k'}\frac{\partial q_k'}{\partial p_i},$$

und

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial q_1'}{\partial q_i} + \cdots + p_k \frac{\partial q_k'}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_1'}\frac{\partial q_1'}{\partial q_i} - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k'}\frac{\partial q_k'}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

also nach (2)

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = q_i' = \frac{d q_i}{d t},$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

und man bekommt also statt (3)

$$
(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d p_i}{d t} &= -\frac{\partial K}{\partial q_i} + R_i \\ \frac{d q_i}{d t} &= \frac{\partial K}{\partial p_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).
$$

Für die Function K kann man einen einfachen Ausdruck ableiten. Wenn wir nämlich wie im vorigen Paragraphen die Glieder in T vom bez. 2ten, 1ten und 0ten Grade von einander abtrennen und also setzen

$$
T = T_2 + T_1 + T_0,
$$

so wird

$$
(6) \qquad K = T_2 - T_0.
$$

In der That hat man nach (4)

$$
K = \sum p_i q_i' - T = \sum \left(\frac{\partial T_2}{\partial q_i'} + \frac{\partial T_1}{\partial q_i'} \right) q_i' - T_2 - T_1 - T_0;
$$

nun sind aber T_2 und T_1 homogene Functionen von $q_1', q_2', \ldots, q_k'$ von dem zweiten bez. ersten Grad. Man hat also nach dem Theorem von Euler

$$
2 T_2 = \sum \frac{\partial T_2}{\partial q_i'} q_i',
$$

$$
T_1 = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i'} q_i',
$$

womit die Gleichung (6) bewiesen ist.

Ist eine Kräftefunction U vorhanden, so nehmen die canonischen Differentialgleichungen eine besonders einfache Gestalt an. Setzt man nämlich

$$
(7) \qquad H = T_2 - T_0 - U,
$$

so ist

$$
(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d p_i}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{d q_i}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).
$$

Man muss sich daran erinnern, dass man in T_2 $q_1', \ldots q_k'$ *gegen* $p_1, \ldots, p_k$ *mittels der Gleichungen* (2) *zu vertauschen hat.*

Die Wahl der canonischen Coordinaten kann in unendlich vielen Weisen vor sich gehen. *In der That kann man die absoluten*

Coordinaten gegen ein ganz beliebiges unabhängiges System von Coordinaten (q_i) *vertauschen. Immer lassen sich die entsprechenden* p_i *mit Hilfe der Gleichungen (2) finden.*

Beispiel 1. *Bestimmung der geradlinigen absoluten Coordinaten durch canonische Differentialgleichungen.*

Man hat nun in (1) § 7 zu setzen:

$$q_1 = x_1, \ldots, q_n = x_n,$$

$$q_{n+1} = y_1, \ldots, q_{2n} = y_n,$$

$$q_{2n+1} = z_1, \ldots, q_{3n} = z_n,$$

und also

$$2T = 2T_2 = \sum m_i q_i'^2,$$

wenn nämlich $m_{n+1} = m_1$ u. s. w., $m_{2n+1} = m_1$ u. s. w. gesetzt wird.

Es ist also nach (2)

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = m_i q_i'$$

und demnach

$$(9)\quad \begin{cases} 2T = \sum \frac{1}{m_i} p_i^2, \\ \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{cases}$$

wo

$$H = T - U$$

und wo ich vorausgesetzt habe, dass eine Kräftefunction existirt.

Beispiel 2. *Bewegung eines Körpers auf Achsen bezogen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Anfangspunkt drehen.*

Die lebendige Kraft hat nach (19) § 7 den Ausdruck

$$2T = \xi'^2 + \eta'^2 + 2n(\xi\eta' - \xi'\eta) + n^2(\xi^2 + \eta^2),$$

wo nur die Glieder, die sich auf einen Körper beziehen, mitgenommen sind und die Masse gleich der Einheit gesetzt worden ist.

Es ist also

$$2T_2 = \xi'^2 + \eta'^2; \qquad 2T_0 = n^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Setzt man nun

$$q_1 = \xi, \qquad q_2 = \eta,$$

so wird nach (2)

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \xi' - n\eta = q_1' - n q_2,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \eta' + n\xi = q_2' + n q_1,$$

welche Gleichungen, nach q_1' und q_2' aufgelöst, geben

$$q_1' = p_1 + n q_2 ,$$
$$q_2' = p_2 - n q_1 .$$

Hieraus bekommt man nun:

$$2 T_2 = (p_1 + n q_2)^2 + (p_2 - n q_1)^2 ,$$
$$2 T_1 = 2 n (q_1 p_2 - q_2 p_1) - 2 n^2 (q_1^2 + q_2^2) ,$$
$$2 T_0 = n^2 (q_1^2 + q_2^2) ,$$

und es ist also, wenn eine Kräftefunction U existirt,

$$H = T_2 - T_0 - U ,$$

oder

$$H = \frac{1}{2} \left[(p_1 + n q_2)^2 + (p_2 - n q_1)^2 - n^2 (q_1^2 + q_2^2) \right] - U , \tag{10}$$

$$\frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} , \qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \qquad (i = 1, 2)$$

Werden die Gleichungen (8) bez. mit $- \frac{d q_i}{d t}$ und $+ \frac{d p_i}{d t}$ multiplicirt und sämmtliche Gleichungen für $i = 1, 2, \ldots, k$ addirt, so bekommt man

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{d t} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{d q_k}{d t} ,$$
$$+ \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{d p_1}{d t} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{d p_k}{d t} ,$$

eine Gleichung, die man einfacher

$$0 = \frac{d H}{d t} - \frac{\partial H}{\partial t} \tag{11}$$

schreiben kann, wenn nämlich unter $\frac{\partial H}{\partial t}$ der Differentialquotient von H nach t, insofern t *explicite* in H vorkommt, verstanden wird. Ist H von der Zeit (t) explicite unabhängig, so ist also

$$H = C , \tag{12}$$

wo C eine Constante bezeichnet.

Dies Integral fällt nicht nothwendig mit dem Integral der lebendigen Kraft zusammen. Das letztere lautet nämlich

$$T = U + C_1,$$

d. h.

(13) $$T_2 + T_1 + T_0 = U + C_1,$$

wogegen nach (12)

$$T_2 - T_0 = U + C.$$

Wenn nun diese beiden Integrale existiren, was nicht nothwendiger Weise der Fall zu sein braucht, so folgt aus diesen Gleichungen, dass

(14) $$T_1 + 2\,T_0 = C_1 - C.$$

In dem zweiten von uns behandelten Beispiele existiren unter Umständen sowohl das Integral der lebendigen Kraft wie das Integral $H = C$. Es muss also nach (14)

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = \text{Constante}$$

auch ein Integral der Differentialgleichungen sein. In der That fällt dasselbe mit dem sogen. Flächenintegral zusammen.

Wenn T nur die Glieder zweiten Grades in $q_1', \ldots, q_k'$ enthält, so hat man

$$H = T - U.$$

Man kann in diesem Fall leicht den Ausdruck für die Coefficienten von $p_i p_j$ in T finden. Sei nämlich

$$2\,T = \sum \alpha_{ij} q_i' q_j',$$

so wird nach (2)

$$p_1 = \alpha_{11} q_1' + \cdots + \alpha_{1k} q_k',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_k = \alpha_{k1} q_1' + \cdots + \alpha_{kk} q_k',$$

welche Gleichungen, nach q' aufgelöst, geben

(15) $$\left\{\begin{aligned} \Delta q_1' &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{j1}} p_j, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta q_k' &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{jk}} p_j, \end{aligned}\right.$$

wo

$$\Delta = |\,\alpha_{ij}\,|.$$

Nun ist aber, weil T eine homogene Function zweiten Grades in q_i' ist,

$$2\,T = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum q_i' p_i$$

und also nach (15)

$$2\,T = \sum \frac{1}{\varDelta}\,\frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{ij}} p_i p_j \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k).$$

§ 9. Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung.

Die canonische Form für die Bewegungsgleichungen in der Mechanik

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k),$$

wo

$$(2) \qquad H = T_2 - T_0 - U,$$

enthält an sich nur einen formalen Fortschritt für die Aufstellung der Differentialgleichungen. Diese Form bringt uns nicht *direct* der Lösung des Problemes näher. Indessen ist die Discussion dieser Gleichungen einen wichtigen Schritt vorwärts gebracht durch folgendes von Sir Raoul Hamilton und Jacobi gefundene Theorem:

H ist im Allgemeinen eine Function von t; $q_1, q_2, \ldots q_k$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Man ersetze in dieser Function alle Grössen p_i durch die partiellen Differentialquotienten einer Function V, so dass

$$(3) \qquad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

und betrachte die partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t;\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k;\, \frac{\partial V}{\partial q_1},\, \frac{\partial V}{\partial q_2},\, \ldots,\, \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Angenommen, dass man ein Integral $V\,(t;\, q_1, \ldots, q_k;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ gefunden hat, das k unabhängige Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ enthält, so ist das allgemeine Integral von (1) durch folgende Formeln gegeben:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & p_1 = \dfrac{\partial V}{\partial q_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \beta_k; & p_k = \dfrac{\partial V}{\partial q_k} \end{array}\right\}\quad (6),$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_k$ *k neue willkürliche Constanten bezeichnen.*

Die Gleichungen (6) nennt man bisweilen die *intermediären* Integrale.

Bemerkung: Die Constanten $\alpha_1 \ldots, \alpha_k$ in V werden *unabhängige* Constanten genannt, wenn die Hesse'sche Determinante von V in Bezug auf $q_1, \ldots q_k$; $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ von Null verschieden ist, also wenn

$$(7)\qquad E = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_1}, \ldots, \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial \alpha_k} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_1}, \ldots, \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \alpha_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wenn nämlich (7) erfüllt ist, so ist das Integral V so beschaffen, dass man *beliebige Anfangswerthe für die Coordinaten* $p_1, \ldots, p_k$; $q_1, \ldots, q_k$ *annehmen kann.* In der That, wenn $p_1^0, \ldots, p_k^0$; $q_1^0, \ldots, q_k^0$ die Werthe der Coordinaten für $t = t_0$ sind, so ist nach (6)

$$p_1^0 = \frac{\partial V}{\partial q_1^0}(t_0;\, q_1^0, \ldots, q_k^0;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$p_k^0 = \frac{\partial V}{\partial q_k^0}(t_0;\, q_1^0, \ldots q_k^0;\, \alpha_1, \ldots \alpha_k).$$

Die Functionaldeterminante dieser Gleichungen in Bezug auf $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ist eben die Determinante E, und da wir angenommen haben, dass diese von Null verschieden ist, so lassen sich die obigen Gleichungen in Bezug auf $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ auflösen. Die entsprechenden Werthe für $\beta_1, \ldots \beta_k$ sind dann durch (5) bestimmt.

Für *specielle* Werthe von $p_1^0, \ldots, p_k^0$; $q_1^0, \ldots, q_k^0$ kann indessen E verschwinden, ohne dass die Gleichungen (5) und (6) aufhören, das allgemeine Integral zu repräsentiren. Diese speciellen

Werthe sind dann *singuläre* Punkte der betreffenden Differentialgleichungen.

Wenn die durch (5) und (6) bestimmten Werthe von $q_1, \ldots, q_k; p_1, \ldots, p_k$ die Gleichungen (1) *formell* befriedigen, so wissen wir also, dass sie das *vollständige* Integral ausmachen. Aus (5) und (6) erhält man durch Differentiation

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\dfrac{d q_1}{d t} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_k}\dfrac{d q_k}{d t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_1}\dfrac{d q_1}{d t} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_k}\dfrac{d q_k}{d t}. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d p_1}{d t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_1}\dfrac{d q_1}{d t} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_k}\dfrac{d q_k}{d t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d p_k}{d t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_1}\dfrac{d q_1}{d t} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_k}\dfrac{d q_k}{d t}. \end{cases}$$

Anstatt nun diese Gleichungen nach $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$ zu lösen und die Lösung mit (1) zu vergleichen, wird es einfacher ausfallen, die Gleichungen (1) in (7) und (8) einzusetzen, und zu zeigen, dass diese Gleichungen somit identisch erfüllt werden.

Setzt man nun die Ausdrücke (1) für $\frac{d q_i}{d t}$ in (7) ein, so bekommt man

$$(9)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_1}\dfrac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha_k \partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber eine Identität. Da nämlich $V(t; q_1, \ldots, q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ die partielle Differentialgleichung (4) identisch erfüllt, so muss auch das Resultat, das man erhält, wenn man (4) nach irgend einer von den Grössen $q_2, \ldots, q_k$ oder $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ differentiirt, identisch gleich Null sein. Differentiirt man aber (4) nach α_i, so bekommt man

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\, \partial \alpha_1}$$

u. s. w., welche Gleichungen offenbar mit (9) identisch werden, wenn man (6) berücksichtigt.

Differentiirt man (4) dagegen nach q_i, so bekommt man

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\, \partial q_1}$$

u. s. w., wogegen nach (8) und (1)

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\, \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

u. s. w., und diese Gleichungen werden mit einander identisch, weil

$$\frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Wir haben also bewiesen, dass (1), (7) und (8) mit einander *vereinbar* sind; dieselben müssen dann auch identisch sein, denn die Gleichungen (7) lassen sich nach $\frac{d q_i}{d t}, \ldots, \frac{d q_k}{d t}$ auflösen, weil $E \neq 0$, und (7) und (8) geben also völlig bestimmte Werte für $\frac{d p_i}{d t}$ und $\frac{d q_i}{d t}$, und da also keine anderen Functionen diese Gleichungen befriedigen können, so müssen dieselben mit (1) zusammenfallen. Und das war zu beweisen.

Ist H von der Zeit *explicite* nicht abhängig, so kann man die partielle Differentialgleichung (4) vereinfachen. Setzt man nämlich in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0 \tag{4}$$

$$V = -ht + W(q_1, \ldots, q_k;\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \tag{10}$$

so wird

$$\frac{\partial V}{d t} = -h$$

und statt (4) bekommt man

$$H\left(q_1, \ldots, q_k;\ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = h, \tag{11}$$

in welcher Form die HAMILTON-JACOBI'sche Differentialgleichung gewöhnlich vorkommt.

Da nun

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial W}{\partial h},$$

so lautet nach (5) und (6) die Lösung von (11)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, & \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, & \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Beispiel 1. *Attraktion eines Körpers von zwei festen Centra.*

Nimmt man hier die absoluten Coordinaten x, y, z zu q-Coordinaten, so dass

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y, \qquad q_3 = z,$$

so wird

$$2\,T = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2$$

und somit

$$p_1 = q_1', \qquad p_2 = q_2', \qquad p_3 = q_3'.$$

Die Kräftefunction lautet

$$U = \frac{K}{\sqrt{(c - q_1)^2 + q_2^2}} + \frac{K'}{\sqrt{(c + q_1)^2 + q_2^2}},$$

und es ist also

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U.$$

Da die Zeit nicht in H *explicite* vorkommt, so lautet nun die HAMILTON-JACOBI'sche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right] = \frac{K}{\sqrt{(c - q_1)^2 + q_2^2}} + \frac{K'}{\sqrt{(c + q_1)^2 + q_2^2}} + h,$$

zu welcher Gleichung man ein Integral W aufzusuchen hat, das, ausser h, zwei unabhängige Constanten enthält.

Die Integration dieser Gleichung würde offenbar kaum gelingen, wenn man die absoluten Coordinaten als q-Coordinaten beibehält. Führt man statt deren die elliptischen Coordinaten (37) § 7 ein, so dass

$$q_1 = \lambda, \qquad q_2 = \mu,$$

so ist

$$(x'^2 + y'^2) = 2\,T = (q_1^2 - q_2^2)\left[\frac{q_1'^2}{q_1^2 - c^2} + \frac{q_2'^2}{c^2 - q_2^2}\right].$$

Es ist also nach (2) § 8

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}\, q_1',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2}\, q_2',$$

und hieraus

$$2\,T = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[(q_1^2 - c^2)\,p_1^2 + (c^2 - q_2^2)\,p_2^2\right]. \tag{13*}$$

Die Kräftefunction ist

$$U = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[(K + K')\,q_1 - (K - K')\,q_2\right], \tag{14}$$

und es ist also

$$H = T - U.$$

$$\frac{d\,q_1}{d\,t} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \frac{d\,p_1}{d\,t} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{d\,q_2}{d\,t} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \frac{d\,p_2}{d\,t} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

Die Hamilton-Jacobi'sche partielle Differentialgleichung wird also

$$\frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[\frac{1}{2}\,(q_1^2 - c^2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\,(c^2 - q_2^2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - (K+K')q_1 + (K-K')q_2\right] = h,$$

eine Gleichung, die unmittelbar auf eine Quadratur zurückgeführt werden kann.

Beispiel 2. *Das Problem der zwei Körper.*

Die Differentialgleichungen in *relativen* Coordinaten lauten

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{15}$$

wo

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{16}$$

Obgleich also hier von *relativen* Coordinaten die Rede ist, so kann man doch die obigen Auseinandersetzungen direct benutzen, da nämlich diese Gleichungen von derselben Form sind, die für die Anwendung der Lagrange'schen und Hamilton'schen Gleichungen erforderlich ist.

Man kann also setzen:

$$T = \frac{1}{2}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2). \tag{17}$$

Werden nun x, y, z als q-Coordinaten gewählt, so werden nach (2) § 8 x', y', z' die entsprechenden p-Coordinaten, und die HAMILTON-JACOBI'sche Differentialgleichung lautet

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r} + h.$$

Auch hier eignen sich die rechtwinkligen Coordinaten nicht gut für die Integration. Dagegen passen hier besser die Polarcoordinaten. Nach (12) § 7 ist dann der Ausdruck für T

$$2\,T = r'^2 + r^2\,\varphi'^2 + r^2\cos^2\varphi\,\theta'^2.$$

Setzt man also

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \varphi, \qquad q_3 = \theta,$$

so bekommt man

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\,\varphi',$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\cos^2\varphi\,\theta'.$$

Die Differentialgleichungen für diese Coordinaten sind nun von canonischer Form

$$\frac{d\,q_i}{d\,t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d\,p_i}{d\,t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

wo

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r}.$$

Die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung für das Zwei-Körperproblem lautet also

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = h. \tag{18}$$

Die Integration dieser Gleichung werden wir in einem folgenden Abschnitt ausführen.

Beispiel 3. *Die Bewegung eines Körpers sei auf bewegliche Achsen bezogen, und U sei eine Function der Coordinaten des Körpers in Bezug auf diese beweglichen Achsen.*

Man hat also

$$U = U(\xi,\ \eta)$$

und nach (19) § 7

$$2\,T = \xi'^2 + \eta'^2 + 2\,\frac{d\,v}{d\,t}(\xi\,\eta' - \xi'\,\eta) + \left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Werden nun ξ und η als q-Coordinaten genommen, so sind die entsprechenden p_i

$$p_1 = \xi' - \frac{dv}{dt}\eta,$$

$$p_2 = \eta' + \frac{dv}{dt}\xi,$$

und

$$H = T_2 - T_0 - U = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta),$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(p_1 + \frac{dv}{dt}\eta\right)^2 + \left(p_2 - \frac{dv}{dt}\xi\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta),$$

und nun ist nach (4) die gesuchte Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{dv}{dt}\eta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{dv}{dt}\xi\right)^2$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2(\xi^2 + \eta^2) - U(\xi, \eta) = 0.$$

Ist $V(\xi, \eta; \alpha_1, \alpha_2)$ eine Function mit zwei *unabhängigen* Constanten α_1 und α_2, welche dieser Gleichung genügt, so sind ξ und η durch die Gleichungen (5) und (6) bestimmt.

§ 10. Variation der Constanten in einem mechanischen Problem.

Es sei ein canonisches System von Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zur Lösung vorgelegt.

Die *charakteristische* Function H theile man in beliebiger Weise in zwei Theile H_0 und H_1, so dass

$$(2)\qquad H = H_0 + H_1,$$

und nehmen wir an, dass man eine Lösung der Differentialgleichungen

$$(3)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gefunden hat, entweder indem man die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0 \tag{4}$$

angewandt hat, oder durch irgend eine andere Methode, so dass die Lösung von (3) die folgende ist

$$\left\{ \begin{aligned} q_i &= q_i(t;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n), \\ p_i &= p_i(t;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n), \end{aligned} \right. \tag{5}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n$ wobei als *unabhängige* Integrationsconstanten auftreten. Man kann sich dann das Problem stellen, *die Gleichungen (1) zu integriren unter Anwendung von* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n$ *als Veränderliche statt* $q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n$. Diese Aufgabe nennt man das *Problem der Variation der willkürlichen Constanten.*

Zuerst von Euler aufgestellt, ist dieses Problem in seiner allgemeinen Fassung besonders von Lagrange ausgebildet worden. Seine Anwendung auf die Störungstheorie enthält eines von den fruchtbarsten Resultaten der Untersuchungen dieses grossen Geometers in der Mechanik des Himmels.

Die Aufgabe ist also, die Differentialgleichungen für α_i und β_i aufzustellen. Es lässt sich nun zeigen, dass, wenn α_i und β_i die bei der Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung (4) nach den Formeln (5) und (6) im vorigen Paragraphen auftretenden Constanten bezeichnen, man einfach

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}, \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

bekommt.

Die α_i und β_i werden aus diesem Grunde *canonische Integrationsconstanten* genannt.

Beweis:

Aus (5) erhält man:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\frac{d\alpha_r}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\frac{d\beta_r}{dt} \right)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\frac{d\alpha_r}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\frac{d\beta_r}{dt} \right).$$

Nun hatte man die Form (5) für q_i und p_i durch die Integration von (3) erhalten, es ist also

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so dass die obigen Gleichungen lauten:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dt} + \\ + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_1}\frac{d\beta_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_n}\frac{d\beta_n}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \end{cases}$$

$$8 \quad \begin{cases} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_n}\frac{d\alpha_n}{dt} + \\ + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_1}\frac{d\beta_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_n}\frac{d\beta_n}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Setzt man hier $i = 1, 2, \ldots, n$, so bekommt man $2n$ Gleichungen, aus denen $\frac{d\alpha_i}{dt}$ und $\frac{d\beta_i}{dt}$ berechnet werden können, da die Determinante der Coefficienten von Null verschieden ist, weil wir angenommen haben, dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *unabhängige* Constanten sind. Diese Berechnung wird in folgender Weise einfach ausgeführt.

Man multiplicire die erstere der obigen Gleichungen mit $\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}$, die letztere mit $-\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}$ und addire sämmtliche so erhaltenen Gleichungen, indem man nach einander setzt $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wir benutzen dabei folgende Bezeichnung

$$(9) \quad (a, b) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial a}\frac{\partial p_i}{\partial b} - \frac{\partial q_i}{\partial b}\frac{\partial p_i}{\partial a}\right),$$

eine Gleichung, die man auch in den folgenden Formen schreiben kann

$$(9^*) \quad (a, b) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i \frac{\partial p_i}{\partial b}}{\partial a} - \frac{\partial q_i \frac{\partial p_i}{\partial a}}{\partial b}\right)$$

oder

$$(9^{**}) \quad (a, b) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i \frac{\partial q_i}{\partial a}}{\partial b} - \frac{\partial p_i \frac{\partial q_i}{\partial b}}{\partial a}\right).$$

Wir erhalten in dieser Weise

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i, \alpha_r) \frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i, \alpha_r) \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r},$$

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_r) \frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i, \beta_r) \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}.$$

Die Gleichung (11) erhält man, indem man (7) und (8) mit bez. $\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}$ und $-\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}$ multiplicirt hat und die Resultate für sämmtliche i addirt.

Die Ausdrücke (a, b) sind zuerst von LAGRANGE eingeführt worden und werden oft LAGRANGE'sche Parenthesen genannt. Dieselben besitzen verschiedene interessante Eigenschaften, von denen ich hier nur zwei hervorhebe, nämlich

$$(12) \qquad \begin{cases} (b, a) = -(a, b) \\ (a, a) = 0 \end{cases},$$

die aus der Definition unmittelbar folgen.

Die Formeln (10) und (11) gelten für jedes System von Integrationsconstanten. Besonders einfach gestalten sich indessen diese Gleichungen, wenn α_i und β_i *canonische* Constanten sind.

Wenn nämlich $\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n$ durch die Integration von (4) entstanden sind, und $V(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; q_1, \ldots, q_n)$ also eine Function mit n unabhängigen Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist, welche die Gleichung (4) befriedigt, dann ist

$$(13) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i.$$

Es ist aber nach (9**)

$$(\alpha_r, \beta_s) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s},$$

also nach (13)

$$(\alpha_r, \beta_s) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_s}.$$

Indessen hat man

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_r}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} = \beta_r + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \beta_s},$$

und es ist also

$$(14) \qquad (\alpha_r, \beta_s) = -\frac{\partial \beta_r}{\partial \beta_s} = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq s \\ -1 & \text{„ } r = s. \end{cases}$$

In derselben Weise bekommt man

$$(14^*) \qquad (\alpha_r, \alpha_s) = (\beta_r, \beta_s) = 0.$$

Aus (14) und (14*) folgt nun

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\beta_r}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha_r} \\ \dfrac{d\alpha_r}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \beta_r} \end{cases} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Es gilt also folgender wichtige Satz:

Wenn man die Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH_0}{dq_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mittelst der HAMILTON-JACOBI'*schen partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_0 = 0$$

integrirt, und $q_i(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n)$ *und* $p_i(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n)$ *die so erhaltenen Integralfunctionen bedeuten, wo* α_i *und* β_i *canonische Integrationsconstanten sind, so kann man, wenn* α_i *und* β_i *als veränderliche Grössen betrachtet werden, in den Gleichungen*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n$ *gegen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \ldots, \beta_n$ *durch die Substitutionen*

$$q_i = q_i(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$
$$p_i = p_i(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

vertauschen und die Differentialgleichungen für die neuen Veränderlichen α_i *und* β_i *lauten dann*

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\beta_i}{dt} &= \frac{\partial(H - H_0)}{\partial \alpha_i} \\ \frac{d\alpha_i}{dt} &= -\frac{\partial(H - H_0)}{\partial \beta_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die canonischen Integrationsconstanten denken wir uns durch die Gleichungen (13) bestimmt.

Auf Grund dieses interessanten Theorems allein gebührt der *canonischen* Form der Differentialgleichungen in der Mechanik ein entschiedener Vorzug vor anderen Formen für diese Gleichungen.

ZWEITER ABSCHNITT

UEBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN DER MECHANIK

BEDINGT PERIODISCHE BEWEGUNGEN



§ 1. Integration der HAMILTON-JACOBI'schen Differentialgleichung durch Separation der Variabeln. Theorem von STÄCKEL.

Wenn die Zeit nicht *explicite* in der charakteristischen Function H vorkommt, so lautet die HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung nach Formel (11) § 9 im ersten Abschnitt

$$H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h. \tag{1}$$

Hier ist H eine Function *zweiten Grades* in den partiellen Differentialquotienten von W.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen: Wann lässt sich diese Gleichung durch eine Separation der Variabeln integriren, d. h. wann ist es möglich, die Gleichung (1) in der Weise zu integriren, dass man für W die folgende Form annimmt:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W^{(i)}(q_i), \tag{2}$$

wo also jedes Glied rechter Seite $W^{(i)}(q_i)$ nur von *einer* der Veränderlichen — q_i — abhängig ist.

Die Lösung dieser Aufgabe in ihrer allgemeinen Fassung scheint mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten verbunden zu sein, wenigstens wenn es gilt, sowohl die nothwendigen wie die hinreichenden Bedingungen für die Lösung aufzusuchen. Es ist indessen Herrn P. STÄCKEL gelungen, das Problem in einem ziemlich umfassenden Fall zu lösen.

Dieser Fall ist der, dass in (1) ausser den Veränderlichen $q_1, \ldots, q_n$ nur die *Quadrate* von $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}$ vorkommen. Man kann dann

nicht nur die betreffenden Bedingungen für die Lösung finden, sondern auch *die Bewegung vollständig discutiren.*

Angenommen also, dass (1) von folgender Form ist:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}\right)^2 - (U + \alpha_1) = 0, \tag{3}$$

wo U die Kräftefunction, α_1 eine Constante bezeichnet. Es ist nun die Aufgabe zu untersuchen: wie müssen $A_1, \dots, A_n$ und U von $q_1, \dots, q_n$ abhängen, damit die vollständige Lösung von (3) von der Form (2) sei.

Setzt man

$$W_\varkappa = \frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}, \tag{3*}$$

so ist also

$$\sum A_\varkappa W_\varkappa^2 = 2(U + \alpha_1). \tag{3**}$$

Ist nun $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die vollständige Lösung dieser Gleichung, so muss bei Einsetzung dieser Function in (3**) diese Gleichung in eine Identität übergehen, die also befriedigt wird für beliebige Werthe der Integrationsconstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Man kann also diese Gleichung nach irgend einer von diesen Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ differentiiren, und man bekommt somit die n Gleichungen:

$$\tag{4} \left\{\begin{array}{l} A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_1} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1} = 2, \\ A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_2} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_2} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1 \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_n} + A_2 \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_n} + \dots + A_n \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_n} = 0. \end{array}\right.$$

Da, nach der Annahme, die Function $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein *vollständiges* Integral von (1) ist, so muss nach § 9 im vorigen Abschnitt die HESSE'sche Determinante von W von Null verschieden sein. D. h. es ist

$$E = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \alpha_1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_n}, & \dots, & \frac{\partial^2 W}{\partial q_n \partial \alpha_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Betrachtet man nun die Determinante

(6)
$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1}, & \ldots, & \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_n}, & \ldots, & \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_n} \end{vmatrix},$$

so findet man, dass

(7)
$$\varDelta = 2^n W_1, W_2, \ldots, W_n E,$$

und da E nicht identisch verschwindet, so muss dies auch mit $\varDelta$ der Fall sein.

Wenn dem aber so ist, so kann man (4) nach den Grössen $A_1, \ldots, A_n$ auflösen, und man bekommt dann nach I § 1 (9)

(8)
$$\begin{cases} A_1 = \frac{2}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_1^2}{\partial \alpha_1}}, \\ A_2 = \frac{2}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_2^2}{\partial \alpha_1}}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n = \frac{2}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_n^2}{\partial \alpha_1}}. \end{cases}$$

Nach (3**) ist nun auch

(9)
$$U = -\alpha_1 + \sum_{\varkappa=1}^{n} W_\varkappa^2 \frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_1}}.$$

Da nach I § 1 (2)

$$\varDelta = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_1}},$$

so kann man statt (9) auch schreiben:

(9*)
$$U = \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(W_\varkappa^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_1} \right) \frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_1}}.$$

Die Formeln (8) und (9*) sind immer gültig. Wir haben hier keine andere Annahme über die Function W gemacht, als dass dieselbe das vollständige Integral von (1) ausmacht.

Wir unterwerfen nun W der Bedingung, dass *in W die Variabeln separirt sind*, so dass also W von der Form (2) ist. Wir werden dann noch sehen, was aus den Formeln (8) und (9*) folgt.

Erstens folgt aus (9*), dass $W_\varkappa$ eine Function von $q_\varkappa$ allein ist. Da wir weiter gefunden haben, dass $\varDelta$ nicht identisch verschwindet, so giebt es immer Werthe für die Integrationsconstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, für welche $\varDelta$ von Null verschieden ist. Es sei $\alpha_1{}^0, \ldots, \alpha_n{}^0$ ein solches System von Werthen.

Für diese Werthe von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gehen nun die Functionen

$$\frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha}$$

in bestimmte Functionen von $q_\varkappa$ über. Gesetzt also:

$$\varphi_{\varkappa\nu}(q_\varkappa) = \frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha_\nu}, \quad (\varkappa, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1), & \ldots, & \varphi_{n1}(q_n) \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \varphi_{1n}(q_1), & \ldots, & \varphi_{nn}(q_n) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Für die betreffenden Werthe von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gehen auch die Ausdrücke

$$W_\varkappa{}^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha_1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

in bestimmte Functionen von $q_\varkappa (\varkappa = 1, 2. \ldots, n)$ über. Setzt man also

$$\psi_\varkappa(q_\varkappa) = W_\varkappa{}^2 - \alpha_1 \frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha_1},$$

so gelangt man zu dem *Theorem von* Stäckel:

Wenn die Hamilton-Jacobi'*sche Differentialgleichung*

$$H = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa \left(\frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}\right)^2 - 2(U + \alpha_1) = 0 \tag{11}$$

Separation der Variabeln gestattet, so giebt es nothwendig ein System von n^2 *Functionen*

$$\varphi_{\varkappa\nu}(q_\varkappa) \quad (\varkappa, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und ein System von n *Functionen*

$$\psi_1(q_1), \ldots, \psi_n(q_n)$$

von der Beschaffenheit, dass sich die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *durch die Gleichungen*

$$A_\varkappa = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

und die Kräftefunction U *durch die Gleichung*

$$U = \sum_{\varkappa=1}^{n} \psi_\varkappa \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}} \tag{13}$$

darstellen lassen.[1] Hier ist Δ durch (10) definirt.

(In den Ausdrücken (8) für $A_\varkappa$ kommt der Factor 2 vor. Derselbe kann offenbar weggelassen werden, wobei man nur die willkürlichen Functionen $\psi_\varkappa$ entsprechend zu verändern braucht.)

Diese Bedingungen sind *nothwendig*. Ob auch die Wahl der Functionen $\varphi_{\varkappa\nu}$ und $\psi_\varkappa$ willkürlich geschehen kann, ist hieraus nicht direct einleuchtend. Das ist aber in der That der Fall. Um dies zu zeigen, wäre offenbar der directeste Weg, wenn man beweisen könnte, dass die Gleichung (11), wo die Coefficienten durch (12) und (13) gegeben sind, immer durch Separation der Variabeln gelöst werden kann, was für Werthe auch den Functionen φ und ψ zuertheilt werden. Das ist gerade, was Stäckel a. a. O. gezeigt hat.

Die Lösung der betreffenden Gleichung ist in der That die folgende:

$$W = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \sqrt{2\,\psi_\varkappa(q_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\,\alpha_\lambda\, \varphi_{\varkappa\lambda}(q_\varkappa)}\, d\,q_\varkappa . \tag{14}$$

---

[1] P. Stäckel: Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung mittels Separation der Variabeln. Habilitationsschrift. Halle 1891.

Hieraus folgt nämlich

$$(15)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}\right)^2 = 2\,\psi_\varkappa(q_\varkappa) + \sum_{\lambda=1}^{n} 2\,\alpha_\lambda\,\varphi_{\varkappa\lambda}(q_\varkappa).$$

Setzt man aber in (11) die Ausdrücke (12) und (13) für Δ und U ein, und nimmt auf die Relation

$$1 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{\varkappa 1}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}}$$

Rücksicht, so lautet dieselbe:

$$(16)\qquad \frac{1}{\Delta}\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_\varkappa}\right)^2 - 2\,\psi_\varkappa - 2\,\alpha_1\,\varphi_{\varkappa 1}\right] = 0.$$

Diese Gleichung wird aber durch (15) befriedigt. Setzt man nämlich diesen Ausdruck für $\frac{\partial W}{\partial q}$ ein, so bekommt man statt (16)

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{\varkappa=1}^{n}\left\{\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}}\sum_{\lambda=2}^{n} 2\,\alpha_\lambda\cdot\varphi_{\varkappa\lambda}(q_\varkappa)\right\} = \frac{1}{\Delta}\sum_{\lambda=2}^{n}\left\{2\,\alpha_\lambda\sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_{\varkappa\lambda}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}}\right\}.$$

Nun ist aber nach I § 1 (2)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\varphi_{\varkappa\lambda}\,\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}} = \begin{cases}1 & \text{für } \lambda = 1\\ 0 & \text{,, } \lambda \neq 1\end{cases},$$

so dass die Coefficienten von α_λ identisch verschwinden.

Die partielle Differentialgleichung (11) wird also durch (14) befriedigt. Diese Gleichung enthält auch die erforderliche Zahl von Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und diese sind von einander *nicht abhängig.* In der That folgt aus (15), dass

$$\frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha_\nu} = 2\,\varphi_{\varkappa\nu}.$$

Und folglich ist

$$\left|\frac{\partial W_\varkappa{}^2}{\partial \alpha_\nu}\right| = 2^n\left|\varphi_{\varkappa\nu}\right| \qquad (\varkappa,\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Andererseits ist aber

$$\left| \frac{\partial W_\varkappa^2}{\partial \alpha_\nu} \right| = 2^n W_1 W_2 \ldots W_n \left| \frac{\partial W_\varkappa}{\partial \alpha_\nu} \right|$$

$$= 2^n W_1 W_2 \ldots W_n \left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_\varkappa \, \partial \alpha_\nu} \right|.$$

Da nun angenommen worden ist, dass $|\varphi_{\varkappa\nu}|$ nicht identisch verschwindet, so muss dies auch mit $\left| \frac{\partial^2 W}{\partial q_\varkappa \, \partial \alpha_\nu} \right|$ der Fall sein, und die Integrationsconstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind also von einander unabhängig.

Der partiellen Differentialgleichung

$$H = 0$$

entspricht das System von canonischen Differentialgleichungen

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d q_\iota}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_\iota} \\ \frac{d p_\iota}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_\iota} \end{aligned} \right. \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, n),$$

wo nun, wenn Separation der Variabeln stattfindet,

$$(18) \qquad H = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{n} A_\varkappa p_\varkappa^2 - U,$$

und $A_\varkappa$ und U durch die Relationen (12) und (13) gegeben sind. Nach I § 9 (12) lautet nun die Lösung von (17) folgendermaassen

$$(19) \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa 1}(q_\varkappa)\, d q_\varkappa}{\sqrt{2 \psi_\varkappa(q_\varkappa) + 2 \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda \varphi_{\varkappa\lambda}(q_\varkappa)}},$$

$$(19^*) \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \frac{\varphi_{\varkappa\mu}(q_\varkappa)\, d q_\varkappa}{\sqrt{2 \psi_\varkappa(q_\varkappa) + 2 \sum_{\gamma=1}^{n} \alpha_\lambda \varphi_{\varkappa\lambda}(q_\varkappa)}}$$

$$(\mu = 2, 3, \ldots, n).$$

Diese Gleichungen (19) und (19*) enthalten also die vollständige Lösung der canonischen Differentialgleichungen (17) unter den hier gemachten Voraussetzungen.

Stellen wir also die Resultate zusammen, so lauten sie folgendermaassen:

Wenn $n(n+1)$ Functionen je einer Veränderlichen

$$\varphi_{\varkappa\nu}(q_\varkappa) \qquad (\varkappa,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

und

$$\psi_\varkappa\ (q_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

gegeben sind, von der Beschaffenheit, dass die Determinante

$$\Delta = |\ \varphi_{\varkappa\nu}\ | \qquad (\varkappa,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

nicht identisch verschwindet, aber sonst willkürlich gewählt sind; wenn wir weiter annehmen, dass die $n+1$ Functionen $A_1, \ldots\ A_n$ und U so bestimmt sind, dass

$$A_\varkappa = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}},$$

$$U = \sum_{\varkappa=1}^{n} \psi_\varkappa \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}},$$

so ist die Lösung der canonischen Differentialgleichungen

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

wo

$$H = \frac{1}{2}\sum A_\varkappa p_\varkappa^2 - U,$$

durch die Gleichungen (19) und (19) ausgedrückt.*

Bemerkung: Wäre eine von den Unterdeterminanten

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{\varkappa 1}}$$

identisch gleich Null, so würde der entsprechende Coefficient A verschwinden. Dann folgt aber aus den Differentialgleichungen,

dass der entsprechende Werth für $q_\varkappa$ eine Constante ist, so dass die Ordnung der Differentialgleichungen um eine Einheit heruntergedrückt werden kann. Ich habe vorausgesetzt, dass diese Erniedrigung der Ordnung schon vollführt worden ist, so dass keiner von den Coefficienten $A_\varkappa$ verschwindet.

Die durch die Gleichung (19) und (19*) bestimmte Bewegung kann man mit Hülfe dieser Gleichungen vollständig discutiren. Bevor ich aber zu dieser Discussion für eine beliebige Zahl von Veränderlichen übergehe, werde ich das einfachste Beispiel in's Auge fassen, den Fall nämlich, dass nur *eine einzige* Veränderliche q vorhanden ist.

§ 2. Bewegungen, die durch einen Freiheitsgrad bestimmt sind. Libration und Limitation.

Von einer Bewegung, die durch die canonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt ist, sagt man, dass dieselbe n Freiheitsgrade besitzt. Ist nur ein Freiheitsgrad vorhanden, so ist also

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{cases}$$

wo

$$(1^*) \qquad H = \frac{1}{2} A(q) p^2 - U(q).$$

Die entsprechende Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung lautet hier einfach

$$A(q) \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = 2(U + \alpha),$$

und es ist somit

$$(2) \qquad W = \int \sqrt{\frac{2(U+\alpha)}{A(q)}}\, dq.$$

Hieraus bekommt man weiter

$$(3) \qquad t + \beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \int \frac{dq}{\sqrt{2(U+\alpha)A(q)}}.$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Bewegung wollen wir nun untersuchen.

Um die Ausdrucksweise etwas zu verkürzen, will ich die Bezeichnung „mechanische Grösse" einführen. Unter *einer mechanischen Grösse verstehe ich eine Veränderliche, die nebst ihrem ersten Differentialquotienten für jeden endlichen Werth der Zeit reell, stetig und endlich ist.*

Von dieser Art sind z. B. die rechtwinkligen Coordinaten im Drei-Körperproblem in dem Fall, dass ein Zusammenstoss in *endlicher* Zeit nicht vorkommt. Als solche mechanische Grössen kann man auch die osculirenden elliptischen Elemente eines Planeten betrachten u. s. w.

Statt der Zeit kann man hierbei jede andere unabhängige Veränderliche einführen, von der Beschaffenheit, dass sie 1) mit der Zeit stetig wächst und 2) mit der Zeit unendlich wird.

Es sei nun eine mechanische Grösse q durch eine Differentialgleichung von der Form (3) bestimmt. Setzt man

$$2(U+\alpha)A(q) = F(q),$$

so lautet diese Gleichung

$$(4) \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = F(q).$$

Es lässt sich nun zeigen, *dass q niemals einen solchen Werth $q = a$ überschreiten kann, für welchen die Function $F(q)$ verschwindet.*

Es sei nämlich $F(a) = 0$, und die Gradzahl dieser Wurzel sei gleich m, wo m eine ganze positive Zahl bezeichnet. Man kann dann schreiben

$$(4^*) \qquad F(q) = (q-a)^m \varphi(q),$$

wo $\varphi(a)$ von Null verschieden ist. Wir setzen nun voraus, dass $\varphi(q)$ in der Umgebung von $x = a$ in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann, wo also, den Voraussetzungen nach, das constante Glied nicht verschwindet. Aus (4) erhalten wir dann

$$\frac{dq}{(q-a)^{\frac{m}{2}}}\left(c_0 + c_1(q-a) + c_2(q-a)^2 + \dots\right) = \pm\, dt. \tag{5}$$

Wir müssen hier bei der Integration zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Für *ungerade* m lautet das Integral von (5)

$$\frac{2}{(q-a)^{\frac{m}{2}-1}}\left\{\frac{c_0}{m-2} + \frac{c_1}{m-4}(q-a) + \frac{c_2}{m-6}(q-a)^2 + \dots\right\} = \mp(t+\tau), \tag{6}$$

und für *gerade* m

$$\left\{\begin{aligned} & -c_{\frac{m}{2}-1}\log(q-a) + \frac{2}{(q-a)^{\frac{m}{2}-1}}\left\{\frac{c_0}{m-2} + \frac{c_1}{m-4}(q-a) + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{c_2}{m-6}(q-a)^2 + \dots\right\} = \mp(t+\tau), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

wo τ eine Integrationsconstante bezeichnet und innerhalb der Klammer das Glied mit dem Coefficienten $c_{\frac{m}{2}-1}$ wegzulassen ist.

Lassen wir nun in dieser Gleichung q sich dem Werthe $q = a$ nähern, und zwar so, dass die linken Seiten von (6) und (7) reell bleiben, so wächst gleichzeitig der absolute Betrag von der linken Seite *und also auch von t* über alle Grenzen, *so oft nämlich $m \geqq 2$.* Umgekehrt können wir also behaupten, dass, wenn $m \geqq 2$ ist, es keinen endlichen Werth t' von t giebt, für welchen q den Werth a annimmt. Da weiter q von reellen Werthen grösser als a zu reellen Werthen kleiner als a, da $\dot{q}$ reell und stetig ist, nur übergehen kann durch Passiren des Werthes $q = a$ selbst, so kann also, für $m \geqq 2$, q niemals die Wurzel $q = a$ überschreiten.

Ist endlich $m = 1$, so hat man nach (6) folgende Relation zwischen q und t in der Umgebung von $q = a$

$$(8) \qquad \pm(t+\tau) = 2(q-a)^{1/2}\left\{c_0 + \frac{c_1}{3}(q-a) + \frac{c_2}{5}(q-a)^2 + \cdots\right\}.$$

Hieraus bekommt man nun

$$(8^*) \qquad q - a = A_1(t+\tau)^2 + A_2(t+\tau)^4 + \cdots$$

Für $t = -\tau$ folgt nun $q = a$, welchen Werth man also hier für einen endlichen Werth von t erreicht. Die Stelle $q = a$ kann aber auch hier nicht überschritten werden. In der That folgt aus (8*), dass, für A_1 *positiv*, $q > a$ sein muss, für A_1 *negativ* immer $q < a$. In beiden Fällen kann die Stelle $q = a$ nicht überschritten werden.

Wir sind also zu dem folgenden Resultat gelangt:

Wenn q eine mechanische Grösse ist, die durch die Differentialgleichung

$$(a) \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = F(q)$$

bestimmt ist, so kann q für keinen endlichen Werth von t eine solche Stelle $q = a$ überschreiten, für welche

$$(b) \qquad F(q) = 0$$

ist.

Ist $q = a$ eine einfache Wurzel von (b), *so wird dieser Werth für einen endlichen Werth von t erreicht und der Differentialquotient von q wechselt für $q = a$ das Zeichen. Ist die Ordnungszahl der Wurzel grösser als Eins, so wird der Werth $q = a$ für keinen endlichen Werth von t erreicht.*

Es seien nun a und b ($b > a$) zwei *benachbarte* Wurzeln von (b) mit den Ordnungszahlen m und n, so dass

$$(9) \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = (q-a)^m (b-q)^n \psi(q),$$

wo $\psi(q)$ für keinen Werth von q zwischen a und b, die Grenzen eingeschlossen, verschwindet.

Wenn q bei dem Anfang der Bewegung zwischen a und b liegt, so muss also nach dem obigen Theorem q immer zwischen den Grenzen a und b liegen.

Um die durch (9) bestimmte Bewegung zu untersuchen, führen wir eine Hilfsgrösse w ein, die so definirt ist, dass

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 = \beta^2 (q-a)^m (b-q)^n , \tag{10}$$

und es ist dann

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2}\psi(q). \tag{11}$$

Da die Gleichung (9) durch zwei andere, jede mit ihrer besonderen Integrationsconstante, ersetzt worden ist, so ist es erlaubt, die eine von diesen Constanten nach Belieben zu bestimmen. Wir setzen fest, dass in (11) die Integrationsconstante so bestimmt wird, dass w den Werth Null erhält, wenn t selbst gleich Null ist. Dann folgt aus derselben Gleichung, dass w immer einen reellen Werth haben muss. Wir können aber nicht nur über den Werth von w beim Anfang der Bewegung verfügen, sondern, da es nur nothwendig ist, dass die Gleichung

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

zwischen den *Quadraten* der Differentialquotienten stattfindet, so ist es auch erlaubt, $\frac{dw}{dt}$ beim Anfang der Bewegung ein beliebiges Zeichen zu ertheilen.

Geben wir dann dw beim Anfang der Bewegung dasselbe Zeichen wie dt, so werden die Zeichen dieser beiden Grössen immer übereinstimmen, da $\frac{dw}{dt}$ nie Null (oder unendlich) werden kann. Wir haben also für alle Werthe von t

$$\frac{dw}{dt} = +\frac{1}{\beta}\sqrt{\psi(q)},$$

wo β eine noch unbestimmte positive Constante bezeichnet.

Aus dieser Gleichung zwischen w und t können wir eine wichtige Eigenschaft von w ableiten. Da nämlich q in seinen Aenderungen so bestimmt ist, dass immer $b \geqq q \geqq a$, und den gemachten Voraussetzungen gemäss $\psi(q)$ in diesem Gebiete stetig ist und nie Null oder unendlich wird, so muss nothwendig $\psi(q)$

für die genannten q-Werthe eine endliche obere Grenze und eine von Null verschiedene positive untere Grenze haben. Dasselbe gilt dann auch für $\frac{1}{\beta}\sqrt{\psi(q)}$, so dass es immer möglich ist, zwei positive Zahlen L_1 und L_2 zu finden, der Art, dass für alle q, die hier in Betracht kommen,

$$\beta L_1 < \sqrt{\phi(q)} < \beta L_2,$$

und hieraus folgt, dass

$$L_1 t < w < L_2 t. \tag{12}$$

Nachdem wir zwei bestimmte Grenzen gefunden haben, innerhalb deren die Werthe von w eingeschlossen sein müssen, können wir zur Untersuchung der Gleichung (10) übergehen, welche die Relation zwischen q und w enthält.

Wir bemerken hier gleich die grossen Vortheile, die uns die Einführung der Hilfsgrösse w gewährt. In der That liegt nun die ganze Discussion der Bewegung in der Gleichung (10), die durch elementare Methoden behandelt werden kann. Angenommen, dass die Lösung derselben wäre

$$q = f(w),$$

so brauchen wir hier nur w alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen zu lassen, um die ganze Bewegung von q darzustellen. Und noch mehr, wenn wir w mit einer Constante mal t identificiren, können wir eine angenäherte Darstellung der Bewegung bekommen. Es ist dies eine Annäherung von derselben Art wie die, welche man im gewöhnlichen Pendelprobleme bekommt, wenn man die dort auftretende Sinus Amplitudinis gegen einen gewöhnlichen Sinus vertauscht.

Nehmen wir zuerst an, dass

$$m = n = 1,$$

welcher Fall zuerst von Weierstrass in einer wichtigen Abhandlung behandelt worden ist (Monatsberichte der Berliner Akademie 1866).

Es ist nun

$$\frac{dq}{dw} = \beta \sqrt{(q-a)(b-q)}. \tag{13}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$q = a \cos^2 \frac{1}{2} \beta w + b \sin^2 \frac{1}{2} \beta w. \tag{14}$$

Es ist also in diesem Falle q eine periodische Function von w mit der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$. Es wird sich aber zeigen, dass q dann *auch in t periodisch ist.* Ueber die Constante β können wir z. B. so verfügen, dass die Länge der Periode in Bezug auf w mit der Periodenlänge in t übereinstimmt.

Es ist nun nach (11)

$$\int_0^w \frac{\beta\, dw}{\sqrt{\psi(q)}} = t.$$

Wird w um $\frac{2\pi}{\beta}$ vermehrt, so bleibt q unverändert. Nennen wir den entsprechenden Zuwachs in t $2T$, so ist also

$$2T = \int_w^{w+\frac{2\pi}{\beta}} \frac{\beta\, dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{1}{2} \beta w + b \sin^2 \frac{1}{2} \beta w\right)}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber von w unabhängig, da nämlich ψ periodisch in w ist mit der Periode $\frac{2\pi}{\beta}$; folglich wird $2T$ eine Constante, und es ist also q in t periodisch mit der Periode

$$2T = \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} \frac{\beta\, dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{1}{2} \beta w + b \sin^2 \frac{1}{2} \beta w\right)}}, \tag{15}$$

oder

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{\beta}} \frac{\beta\, dw}{\sqrt{\psi\left(a \cos^2 \frac{1}{2} \beta w + b \sin^2 \frac{1}{2} \beta w\right)}}, \tag{16}$$

eine Gleichung, die nach (14) auch folgendermaassen geschrieben werden kann

$$T = \int_a^b \frac{dq}{\sqrt{(q-a)(b-q)\psi(q)}}. \tag{16*}$$

Wenn die Länge der Periode in w und in t gleich sein soll, so hat man also

$$2T = \frac{2\pi}{\beta},$$

oder

$$\beta = \frac{\pi}{T}. \tag{17}$$

Wenn die Wurzeln a und b der Gleichung

$$F(q) = 0$$

einfache Wurzeln sind, so wird also q eine *periodische* Function der Zeit. Diese Function ist auch eine *gerade* Function von t. Die analytische Darstellung dieser Function kann leicht gefunden werden.

Nach dem Theorem von Fourier hat man nämlich

$$q = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos\frac{\pi t}{T} + B_2 \cos\frac{2\pi t}{T} + \ldots, \tag{18}$$

wo

$$T B_n = 2 \int_0^T q \cos\frac{n\pi t}{T}\, dt. \tag{18*}$$

Hieraus bekommt man durch theilweise Integration

$$n\pi B_n = -2 \int_a^b \sin\frac{n\pi t}{T}\, dq, \tag{18**}$$

wo man t durch q auszudrücken hat.

Die Berechnung von (18**) geschieht am besten, indem man t und q durch die Hilfsgrösse w ausdrückt.

Nach (11) und (17) hat man

$$(19)\qquad \begin{cases} dt = \dfrac{\beta\, dw}{\sqrt{\psi\left(a\cos^2\frac{\pi w}{2T} + b\sin^2\frac{\pi w}{2T}\right)}} \\ \quad = \left[\frac{1}{2}c_0 + c_1\cos\frac{\pi w}{T} + c_2\cos\frac{2\pi w}{T} + \ldots\right] dw, \end{cases}$$

und hier ist

$$(19^*)\qquad T c_n = 2\int_0^T \frac{\beta\cos\frac{n\pi w}{T}\, dw}{\sqrt{\psi\left(a\cos^2\frac{\pi w}{2T} + b\sin^2\frac{\pi w}{2T}\right)}}.$$

Im Besonderen ist also nach (16)

$$(19^{**})\qquad \frac{1}{2}c_0 = 1.$$

Durch Integration von (19) erhält man nun

$$(20)\qquad t = w + \frac{T}{\pi}c_1\sin\frac{\pi w}{T} + \frac{T}{2\pi}c_2\sin\frac{2\pi w}{T} + \ldots$$

Durch diese Gleichung ist t durch w ausgedrückt, und die Coefficienten in dieser Reihe können aus (19*) immer, beispielsweise mittels sogenannter mechanischer Quadratur, berechnet werden.

Andererseits ist nach (13) und (14)

$$(21)\qquad dq = \frac{\pi}{2T}(b-a)\sin\frac{\pi w}{T}\, dw.$$

Führen wir nun die Ausdrücke (20) und (21) in (18**) ein, so bekommt man

$$(22)\qquad nTB_n = -(b-a)\int_0^T \sin\frac{n\pi t}{T}\sin\frac{\pi w}{T}\, dw,$$

oder

$$(22^*)\qquad \frac{2nTB_n}{b-a} = \int_0^\pi \cos\frac{\pi}{T}(nt+w)\, dw - \int_0^\pi \cos\frac{\pi}{T}(nt-w)\, dw,$$

wo nun der Ausdruck (20) für t einzuführen ist.

Die numerische Berechnung von B_n nach dieser Formel kann in verschiedener Weise ausgeführt werden: durch mechanische Quadratur, durch Entwickelung nach Potenzen von $c_1, c_2, \ldots$, mittels BESSEL'scher Functionen u. s. w.

Wäre die Ordnungszahl der Wurzeln der Gleichung

$$F(q) = 0$$

grösser als die Einheit, so lässt sich die Discussion der Bewegung mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{dq}{dw} = \beta (q-a)^{\frac{m}{2}} (b-q)^{\frac{n}{2}}$$

leicht ausführen.

Es sei erstens *eine* von den Ordnungszahlen z. B. $n = 1$, die andere — m — aber grösser als Eins. Wenn nun für $t = 0$ dq positiv ist, so wächst q, bis die obere Grenze — $q = b$ — erreicht ist. Hier wechselt nun $dq:dw$ das Zeichen, q fängt an abzunehmen und nähert sich mit wachsendem w (also auch t) unbegrenzt dem Werth $q = a$, ohne denselben in endlicher Zeit zu erreichen.

Wäre zweitens sowohl m wie $n \geqq 2$, dann kann, während der Bewegung, $dq:dw$ niemals das Zeichen wechseln und q nähert sich allmählich einer von den Grenzen a oder b (der letzteren Grenze, wenn, für $t = 0$, $dq:dw$ *positiv* ist, der ersteren, wenn $dq:dw$ *negativ* ist), ohne dieselbe in endlicher Zeit zu erreichen.

Ich habe a. a. O.[1] um die bei der Lösung der Differentialgleichung (4) auftretenden Bewegungen zu charakterisiren, die folgenden Bezeichnungen angewandt:

I. Man sagt, dass eine Grösse eine *Librationsbewegung* besitzt, wenn sie periodisch zwischen zwei festen Grenzen hin und her schwankt. Diese Grenzen werden *Librationsgrenzen* genannt.

II. Man sagt, dass eine Grösse eine *Limitationsbewegung* besitzt, wenn sie sich allmählich einem bestimmten Grenzwerthe nähert,

[1] „Ueber die Lösung mechanischer Probleme, die auf hyperelliptische Differentialgleichungen führen." Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg 1888.

ohne denselben je in endlicher Zeit zu erreichen. Der fragliche Grenzwerth wird *Limitationsgrenze* genannt.

Aus der vorhergehenden Untersuchung geht nun unmittelbar hervor, dass die Bewegung im vorliegenden Falle nur von diesen beiden Arten sein kann. Und *zwar tritt Libration ein, wenn die Wurzeln a und b beide einfach sind, sonst immer Limitation.*

Der allgemeine analytische Ausdruck für q ist für den Librationsfall oben (hauptsächlich nach WEIERSTRASS a. a. O.) gegeben [(18) und (22*)]. Die entsprechenden Ausdrücke in dem Limitationsfall sind, so viel ich weiss, bis jetzt nicht gegeben.

Die hier mit „*Limitation*" bezeichneten Bewegungen sind von derselben Art wie die von POINCARÉ untersuchten *asymptotischen* Bewegungen. Die analytische Entstehungsweise der letzteren ist aber nicht mit der hier betrachteten, für die Limitationsbewegung gültigen, übereinstimmend, und ich habe deswegen den Namen *Limitationsbewegung* beibehalten.

Die Untersuchungen über die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = F(q)$$

haben in der Geschichte der Mathematik eine eigenthümliche Entwickelung gehabt. Lassen wir $F(q)$ ein *Polynom* in q bezeichnen von der Gradzahl s, so wurde im Anfang vorigen Jahrhunderts bewiesen, dass, wenn $s = 4$, q eine sogenannte *elliptische* Function von t ist, die *zwei* Perioden hat, von denen wenigstens eine imaginär sein muss. Ist aber $s > 4$, so muss q, als Function der complexen Veränderlichen t betrachtet, *mehr* als 2 Perioden haben. Nun wurde aber von JACOBI in einer berühmten Abhandlung („De Functionibus duarum Variabilium, quadrupliciter periodicis" Werke II) bewiesen, dass, wenn eine Function 3 (oder mehrere) Perioden hat, entweder diese Perioden sich aus *zwei* Perioden zusammensetzen können, oder die Function so beschaffen sein muss, dass sie bei einem *unendlich kleinen* Zuwachs des Argumentes unveränderlich ist. JACOBI zog hieraus a. a. O. den Schluss, dass, wenn $F(q)$ von höherem als dem vierten Grade ist, *q nicht analytisch als eine Function von t betrachtet werden kann.*

Der Fehlschluss, wenn ich ihn so nennen darf, beruht darauf, dass JACOBI in seinem Beweis angenommen hat, dass q in der ganzen imaginären Ebene unbeschränkt veränderlich ist. Beschränkt man aber, wie WEIERSTRASS es in seiner oben citirten Abhandlung gethan hat, q auf nur *reelle* Werthe, so lässt sich, wie wir schon gesehen haben, q als eine wohl definirte Function der ebenfalls reellen Veränderlichen t betrachten. Man kann sogar auf diesem Wege weiter gehen[1], indem man statt nur zwei Wurzeln von der Gleichung

$$F(q) = 0$$

vier — sie seien a_1, a_2, a_3, a_4 — abtrennt und eine Hilfsgrösse w, durch die folgende Gleichung definirt, einführt:

$$\left(\frac{dq}{dw}\right)^2 = \beta^2 (q - a_1)^{\varepsilon_1} (q - a_2)^{\varepsilon_2} (q - a_3)^{\varepsilon_3} (q - a_4)^{\varepsilon_4},$$

was von Nutzen sein kann, wenn in einem mechanischen Probleme beim Anfang der Bewegung q unter Umständen zwischen verschiedenen Wurzelpaaren a_i und a_j liegen kann.

Beispiel. *Das einfache Pendel.*

Wird die verticale Coordinate des Pendels, von dem Aufhängepunkte nach dem Nadir gerechnet, mit x bezeichnet, und die Länge des Pendels mit l, die Acceleration der Schwerkraft mit g, so ist

$$\frac{l\,dx}{\sqrt{2g(l^2 - x^2)(x - x_0)}} = dt,$$

wo x_0 eine Integrationsconstante bezeichnet.

Aus den obigen Auseinandersetzungen folgt nun unmittelbar, wenn:

1) $-l < x_0 < l$, tritt *Libration* zwischen den Grenzen x_0 und $+l$ ein; wenn

2) $x_0 < -l$, tritt *Libration* zwischen den Grenzen $-l$ und $+l$ ein, d. h. das Pendel bewegt sich immer in derselben Richtung; wenn

3) $x_0 = -l$, tritt *Limitation* ein, und das Pendel nähert sich mit wachsender Zeit beliebig nahe dem obersten Punkte, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen; wenn

---

[1] Vgl. eine Abhandlung von DILLNER in den Mém. de la Société des Sc. phys. et math. de Bordeaux, t. V.

4) $z_0 = +l$, bleibt das Pendel im untersten Punkt unbeweglich.

Für die Periode $2T$ der Bewegung im Falle 1) und 2) ergeben sich nach (16*) die Werthe

$$2T = 2\int\limits_{z_0}^{l} \frac{l\,dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0)}},$$

und

$$2T = 2\int\limits_{-l}^{+l} \frac{l\,dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0)}}.$$

§ 3. Bedingt periodische Bewegungen.

Ich gehe nun zu dem allgemeinen Fall über, dass die Bewegung n Freiheitsgrade besitzt. Es sei also ein canonisches System von Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vorgelegt, und wir nehmen an, dass die entsprechende HAMILTON-JACOBI'sche partielle Differentialgleichung sich durch Separation der Variabeln integriren lässt, so dass nach § 1 (19) und (19*) $q_1, \ldots, q_n$ durch folgende Differentialgleichungen gegeben sind.

$$(2)\qquad t + \beta_1 = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i1}(q_i)\,dq_i}{\sqrt{2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1\varphi_{i1}(q_i) + \ldots + 2\alpha_n\varphi_{in}(q_i)}},$$

$$(2^*)\qquad \beta_j = \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{ij}(q_i)\,dq_i}{\sqrt{2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1\varphi_{i1}(q_i) + \ldots + 2\alpha_n\varphi_{in}(q_i)}}.$$

$$(j = 2, 3, \ldots, n)$$

Die Veränderungen von $q_1, \ldots, q_n$ sollen untersucht werden unter der Voraussetzung, dass sie, nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition, *mechanische Grössen* darstellen.

Für $n = 2$ sind diese Gleichungen zuerst von STAUDE untersucht worden (Math. Annalen 1887), der auch den ausserordentlich fruchtbaren Begriff „*bedingt periodische Bewegungen*", von welchem unten gesprochen wird, eingeführt hat. Für $n > 2$ sind STAUDE's Untersuchungen von STÄCKEL a. a. O. weiter geführt worden, der auch eine besonders wichtige Eigenschaft dieser Bewegungen dargethan hat (Math. Annalen Bd. 54).

Setzt man

$$\Phi_i(q_i) = 2\psi_i(q_i) + 2\alpha_1 \varphi_{i1}(q_i) + \dots + 2\alpha_n \varphi_{in}(q_i), \tag{3*}$$

so lauten die Gleichungen (2) und (2*) nach ihrer Differentiation:

$$\left\{\begin{aligned} dt &= \frac{\varphi_{11}(q_1)\,dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\varphi_{n1}(q_n)\,dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}}, \\ 0 &= \frac{\varphi_{12}(q_1)\,dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\varphi_{n2}(q_n)\,dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 &= \frac{\varphi_{1n}(q_1)\,dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \frac{\varphi_{nn}(q_n)\,dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Beim Anfang der Bewegung mögen $q_1, \dots, q_n$ die Werthe $q_1^0, \dots, q_n^0$ haben. Man betrachte nun die Gleichungen:

$$\Phi_i(q_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

Es seien a_i und b_i zwei Werthe von q_i, für welche (4) erfüllt ist, und so beschaffen, dass $a_i < q_i^0 < b_i$. Diese Wurzeln mögen noch so beschaffen sein, dass zwischen denselben keine andere Wurzel der Gleichung $\Phi_i = 0$ liegt. Die Ordnungszahlen der Wurzeln seien m_i und n_i. Wir setzen nun:

$$\frac{dq_i}{(q_i - a_i)^{\frac{m_i}{2}}(b_i - q_i)^{\frac{n_i}{2}}} = \beta_i\,dw_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{5}$$

Indem wir die Bezeichnungen

(6) $$\Phi_i(q_i) = (q_i - a_i)^{m_i} (b_i - q_i)^{n_i} \Psi_i(q_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und

(7) $$F_{ij}(q_i) = \frac{\varphi_{ij}}{\sqrt{\Psi_i(q_i)}}$$

einführen, so bekommen wir also nun statt (3) die Gleichungen

(8) $$\begin{cases} dt = F_{11}(q_1)\beta_1 dw_1 + \ldots + F_{n1}(q_n)\beta_n dw_n, \\ 0 = F_{12}(q_1)\beta_1 dw_1 + \ldots + F_{n2}(q_n)\beta_n dw_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = F_{1n}(q_1)\beta_1 dw_1 + \ldots + F_{nn}(q_n)\beta_n dw_n. \end{cases}$$

Nach § 1 wissen wir, dass die Determinante

$$\Delta = | \varphi_{ij} | \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist. Es muss dann auch dasselbe mit der Determinante

(9) $$E = | F_{ij} | \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

der Fall sein. Es besteht in der That nach (7) zwischen diesen beiden Determinanten die Relation

(10) $$E = \frac{\Delta}{\sqrt{\psi_1 \cdot \psi_2 \ldots \psi_n}}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach φ_{ij} und betrachtet dabei $\psi_1, \ldots, \psi_n$ als Constanten, so erhält man

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{ij}}.$$

Nun ist aber nach (7)

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial F_{ij}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\psi_i(q_i)}},$$

und es ist also

(11*) $$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial F_{ij}} = \sqrt{\psi_i(q_i)}\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{ij}}.$$

Im Besonderen ist für $j = 1$

(11) $$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial F_{i1}} = \sqrt{\psi_i(q_i)}\,\frac{1}{\Delta}\,\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}.$$

Im ersten Paragraphen haben wir aber bewiesen, dass

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \neq 0,$$

und *es können somit auch nicht die Determinanten*

$$\frac{\partial E}{\partial F_{i1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

identisch gleich Null sein.

Wir nehmen an, dass diese Determinanten für keinen Werth von q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zwischen a_i und b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Null oder unendlich werden.

Nachdem wir diese Bemerkungen über die Determinante E und ihre Unterdeterminanten erster Ordnung vorausgesandt haben, lösen wir nun das System (8) nach $dw_1, \ldots, dw_n$ auf, was geschehen kann, da wir nunmehr wissen, dass die Determinante E von Null verschieden ist.

Nach I § 1 (9) ist also

(12) $$\frac{dt}{E} = \frac{\beta_1\, dw_1}{\frac{\partial E}{\partial F_{11}}} = \cdots = \frac{\beta_n\, dw_n}{\frac{\partial E}{\partial F_{n1}}}.$$

Wenn man nun das Zeichen der Coefficienten $\beta_1, \ldots, \beta_n$ gehörig wählt, so folgt also, *dass indem t von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst* (durch reelle Werthe), *auch $w_1, \ldots, w_n$ immer wachsen müssen.*

Hieraus folgt nun aber zweitens nach (5), den Untersuchungen im vorigen Paragraphen gemäss, *dass q_i immer zwischen den Grenzen a_i und b_i bleiben muss.*

Die Functionen

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial F_{i1}}$$

müssen nun immer eine obere und eine untere Grenze haben und aus (12) folgt dann zuletzt, dass w_i mit t über alle Grenzen wachsen muss.

Die durch die Gleichungen (2) und (2*) definirten Bewegungen sind also insofern den im vorigen Paragraphen untersuchten Bewegungen analog, dass $q_1, \ldots, q_n$ entweder eine *Librations-* oder eine *Limitations*bewegung haben müssen. Nichts hindert, dass einige von den Grössen q_i eine Limitationsbewegung haben, die übrigen eine Librationsbewegung.

Wenn

$$m_i = n_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so tritt Libration bei *allen* Veränderlichen ein, und da dieser Fall von besonderem Interesse ist, so werden wir ihn besonders weiter verfolgen.

Die Gleichung (5) lautet nun

$$\frac{d q_i}{\sqrt{(q_i - a_i)(b_i - q_i)}} = \beta_i \, d w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

und giebt

$$q_i = a_i \cos^2 \frac{1}{2} \beta_i w_i + b_i \sin^2 \frac{1}{2} \beta_i w_i . \tag{14}$$

Diese Werthe von q_i setzen wir in (8) ein. Wenn wir uns der Bezeichnung

$$G_{ij}(w_i) = \int F_{ij}(q_i) \beta_i \, d w_i \tag{15}$$

bedienen, so bekommen wir durch Integration von (8) das System

$$\left\{ \begin{aligned} t + A_1 &= G_{11}(w_1) + \cdots + G_{n1}(w_n), \\ A_2 &= G_{12}(w_1) + \cdots + G_{n2}(w_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= G_{1n}(w_1) + \cdots + G_{nn}(w_n), \end{aligned} \right. \tag{16}$$

wo $A_1, \ldots, A_n$ die Integrationsconstanten sind.

Lassen wir in diesen Gleichungen w_1 um 2π wachsen, so folgt, wenn wir der Einfachheit wegen annehmen, dass sämmtliche

$$\beta_i = \pm 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} t + A_1 + 2\omega_{11} &= G_{11}(w_1 + 2\pi) + G_{21}(w_2) + \ldots + G_{n1}(w_n) \\ A_2 + 2\omega_{12} &= G_{12}(w_1 + 2\pi) + G_{22}(w_2) + \ldots + G_{n2}(w_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n + 2\omega_{1n} &= G_{1n}(w_1 + 2\pi) + G_{2n}(w_2) + \ldots + G_{nn}(w_n), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

und hier ist

$$2\omega_{1j} = G_{1j}(w_1 + 2\pi) - G_{1j}(w_1) = \int_{w_1}^{w_1 + 2\pi} F_{1j}(q_1)\, d w_1 .$$

Da q_1 eine periodische Function von w_1 ist, *so ist also ω_{1j} eine Constante,* und wir haben

$$2\omega_{1j} = \int_0^{2\pi} F_{1j}(q_1)\, d w_1 = 2\int_0^{\pi} F_{1j}(q_1)\, d w_1$$

oder auch

$$\omega_{1j} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi_{1j}(q_1)\, d q_1}{\sqrt{(q_1 - a_1)(b_1 - q_1)\,\Psi_1(q_1)}} .$$

Aehnliche Formeln erhält man, wenn w_2, w_3 u. s. w. um 2π vermehrt werden.

Wir sind also zu dem Resultat gelangt, dass, wenn w_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) um 2π vermehrt wird, die Integrationsconstanten A_1, $A_2, \ldots, A_n$ um *constante* Grössen $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{in}$ wachsen. Umgekehrt können wir auch behaupten, dass, wenn man $w_1, w_2, \ldots, w_n$ als Functionen der Integrationsconstanten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ betrachtet, diese Functionen von der Beschaffenheit sind, dass, wenn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *bezw.* um $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \ldots, \omega_{in}$ vermehrt werden, $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n$ unverändert bleiben, wogegen w_i um 2π vermehrt wird.

Die Grössen $w_1, \ldots, w_n$ sind in der That *eindeutige* Functionen

der Integrationsconstanten $A_1, \ldots, A_n$. Um dies zu beweisen differentiiren wir die Gleichungen (16); indem $A_1, \ldots, A_n$ als Veränderliche betrachtet werden. Nimmt man auf (15) Rücksicht, so bekommt man dann:

$$(18^*)\quad \begin{cases} dA_1 = F_{11}\,dw_1 + \ldots + F_{n1}\,dw_n, \\ dA_2 = F_{12}\,dw_1 + \ldots + F_{n2}\,dw_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dA_n = F_{1n}\,dw_1 + \ldots + F_{nn}\,dw_n, \end{cases}$$

welche Gleichungen, nach $dw_1, \ldots, dw_n$ aufgelöst, geben

$$(18^{**})\quad \begin{cases} E\,dw_1 = \frac{\partial E}{\partial F_{11}}\,dA_1 + \ldots + \frac{\partial E}{\partial F_{1n}}\,dA_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ E\,dw_n = \frac{\partial E}{\partial F_{n1}}\,dA_1 + \ldots + \frac{\partial E}{\partial F_{nn}}\,dA_n. \end{cases}$$

Da nun die Functionaldeterminante E für keinen Werth von q_i, der innerhalb des zulässigen Bereiches für diese Grössen liegt, verschwindet, so gehört offenbar zu einem beliebigen System von Werthen $dA_1, \ldots, dA_n$ ein einziges, bestimmtes System von Werthen für die Differentiale $dw_1, \ldots, dw_n$. Wenn also die Integrationsconstanten $A_1, \ldots, A_n$ eine beliebige continuirliche Reihe von endlichen Werthen durchlaufen, so nehmen $w_1, \ldots, w_n$ auch eine völlig bestimmte continuirliche Reihe von Werthen an.

Die Grössen $q_1, \ldots, q_n$ sind eindeutige Functionen von $w_1, \ldots, w_n$, also auch von $A_1, \ldots, A_n$. Setzen wir nun

$$(19^*)\quad \begin{cases} q_1 = f_1(t + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_n = f_n(t + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n), \end{cases}$$

so haben also die Functionen f, nach dem Obigen, folgende Eigenschaften. Es ist

$$(19)\quad \begin{cases} f_i(t + A_1 + 2\omega_{11}, A_2 + 2\omega_{12}, \ldots, A_n + 2\omega_{1n}) = \\ = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n), \\ f_i(t + A_1 + 2\omega_{21}, A_2 + 2\omega_{22}, \ldots, A_n + 2\omega_{2n}) = \\ = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_i(t + A_1 + 2\omega_{n1}, A_2 + 2\omega_{n2}, \ldots, A_n + 2\omega_{nn}) = \\ = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n), \\ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Diese Functionen sind somit, nach einer von WEIERSTRASS angewandten Bezeichnung, *n-periodische Functionen der n Veränderlichen* $t + A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Die Perioden w_{ij} sind durch folgende Formel gegeben

$$(20)\qquad \omega_{ij} = \int_0^\pi F_{ij}(q_i)\, d w_i = \int_{a_i}^{b_i} \frac{\varphi_{ij}(q_i)\, d q_i}{\sqrt{(q_i - a_i)(b_i - q_i)\, \Psi_i(q_i)}}.$$

Für $t + A_1, A_2, \ldots, A_n$ führen wir n neue, folgendermaassen definirte[1] Veränderliche $u_1, \ldots, u_n$ ein.

$$(21)\quad \begin{cases} \pi(t + A_1) = \omega_{11} u_1 + \omega_{21} u_2 + \ldots + \omega_{n1} u_n, \\ \pi A_2 = \omega_{12} u_1 + \omega_{22} u_2 + \ldots + \omega_{n2} u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi A_n = \omega_{1n} u_1 + \omega_{2n} u_2 + \ldots + \omega_{nn} u_n, \end{cases}$$

wo wir annehmen, dass die Determinante

$$(22)\qquad \Omega = |\omega_{ij}|\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist.

Aus den Relationen (21) folgt nun unmittelbar, dass, wenn $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ um 2π vermehrt wird,

[1] Vgl. WEIERSTRASS: „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze“.

$$t + A_1 \text{ um } 2\omega_{i1},$$
$$A_2 \quad " \quad 2\omega_{i2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_n \text{ um } 2\omega_{in},$$

anwachsen wird. Umgekehrt können wir behaupten — da die Relationen (21) linear sind und die Determinante Ω von Null verschieden ist — dass, indem $t + A_1, A_2, \ldots, A_n$ *bezw.* um $2\omega_{i1}, 2\omega_{i2}, \ldots, 2\omega_{in}$ wachsen, gleichzeitig u_i um 2π vermehrt wird, während $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ unverändert bleiben.

Nach (19) folgt nun, dass $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ periodische Functionen von $u_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sind mit der Periode 2π.

Bezeichnen wir nun mit g_i diejenigen Functionen, in welche die f_i übergehen, wenn die Veränderlichen $u_1, \ldots, u_n$ statt $t + A_1, A_2, \ldots, A_n$ eingeführt werden, so hat man

$$g_i(u_1 + 2\pi, u_2, \ldots, u_n) = g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$g_i(u_1, u_2 + 2\pi, \ldots, u_n) = g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n + 2\pi) = g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

und allgemein

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & g_i(u_1 + 2m_1\pi, u_2 + 2m_2\pi, \ldots, u_n + 2m_n\pi) = \\ & = g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_n$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen.

Functionen dieser Art lassen sich aber (Weierstrass a. a. O.) durch eine generalisirte Fourier'sche Reihe mit n Veränderlichen ausdrücken:

$$(24)\quad \begin{cases} q_i = \sum C^{(i)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} e^{(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \ldots + \nu_n u_n)\sqrt{-1}}, \\ (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = -\infty, \ldots, +\infty), \end{cases}$$

wo die Coefficienten durch die Formel

$$(24^*)\begin{cases} \pi^n C^{(i)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n} = \\ = \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi q_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) e^{-(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \ldots + \nu_n u_n)\sqrt{-1}} du_1\, du_2 \ldots du_n \end{cases}$$

gegeben sind.

Die numerischen Werthe dieser Integrale lassen sich immer berechnen, und in Bezug hierauf gelten — *mutatis mutandis* — dieselben Bemerkungen, die oben in § 2 für eine Veränderliche gemacht wurden.

Die Coordinaten q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind also in diesem Falle $(m_i = n_i = 1)$ n-periodische Functionen der n Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Es kann sich auch ereignen, dass sie periodische Functionen *der Zeit* werden. Im Allgemeinen ist aber dem nicht so.

Nach (21) sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lineare Functionen der Zeit. Löst man diese Gleichung auf, bekommt man

$$(25)\quad \begin{cases} \Omega u_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} \pi (t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{12}} \pi A_2 + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{1n}} \pi A_n, \\ \Omega u_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} \pi (t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{22}} \pi A_2 + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{2n}} \pi A_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega u_n = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} \pi (t + A_1) + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n2}} \pi A_2 + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{nn}} \pi A_n. \end{cases}$$

Wird nun t um $2T$ vermehrt, so vermehrt sich gleichzeitig

$$\begin{array}{lll} u_1 & \text{um} & \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} \cdot 2\pi T, \\ u_2 & ,, & \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} \cdot 2\pi T, \\ \cdots & & \cdots\cdots \\ u_n & ,, & \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} \cdot 2\pi T. \end{array}$$

Wenn die Bewegung *in der Zeit periodisch* sein soll mit der Periode $2T$, so müssen die obigen Zuschüsse zu $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ganze Vielfache von 2π sein; es müssen also dann die folgenden Relationen stattfinden, in welchen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ganze Zahlen bezeichnen,

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{11}} = \frac{m_1}{T},$$

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{21}} = \frac{m_2}{T},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{n1}} = \frac{m_n}{T}.$$

Werden nun diese Gleichungen mit bezw. $\omega_{11}, \omega_{21}, \ldots, \omega_n$ multiplicirt, und ebenso mit $\omega_{12}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{n2}$ u. s. w., und die so erhaltenen Gleichungen addirt, so geht hieraus folgendes System von Gleichungen hervor:

$$(26) \quad \begin{cases} T = m_1\,\omega_{11} + m_2\,\omega_{21} + \cdots + m_n\,\omega_{n1}, \\ 0 = m_1\,\omega_{12} + m_2\,\omega_{22} + \cdots + m_n\,\omega_{n2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = m_1\,\omega_{1n} + m_2\,\omega_{2n} + \cdots + m_n\,\omega_{nn}. \end{cases}$$

Damit die Bewegung periodisch in t werde, müssen also die obigen Relationen zwischen den Perioden ω_{ij} stattfinden. Die Periode (in t) ist dann durch die erste von diesen Formeln gegeben.

Weil die Coordinaten q_i also unter Umständen periodische Functionen von t werden können, so hat STAUDE für diese Bewegungen den Namen *bedingt periodische Bewegungen* eingeführt.

Da die Determinante Ω nicht verschwindet, so gehört nach (26) zu jedem Werth von $2T$ *ein einziges System* von Werthen der Grössen $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Sind die so bestimmten Grössen ganze Zahlen, so ist die Bewegung periodisch mit der Periode $2T$.

In Bezug auf die bedingt periodischen Bewegungen hat STÄCKEL einen interessanten und wichtigen Satz bewiesen, den ich jetzt auseinandersetzen will.

Ich bemerke zuerst, dass einer unendlich kleinen Aenderung der Zahlen $A_1, \ldots, A_n$ nach (18^{**}) eine unendlich kleine Aenderung von $w_1, \ldots, w_n$ und *demnach auch eine unendlich kleine Aenderung von* $q_1, \ldots, q_n$, *entspricht.*

Wir haben nun

$$q_i = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und diese Functionen sind nach (19) von der Beschaffenheit, dass

$$(27) \quad \begin{cases} f_i(t + A_1 + \sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{a1},\ A_2 + \sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{a2}, \ldots, \\ \qquad A_n + \sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{an}) = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n). \end{cases}$$

Nun kann man aber[1] beweisen, dass man immer unendlich viele Systeme ganzer Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ von der Beschaffenheit finden kann, dass jeder der $n - 1$ Ausdrücke

$$\sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{aj}, \quad (j = 2, 3, \ldots, n)$$

kleiner als jede beliebige Grösse ε ist, wie klein ε auch gewählt wird. Es seien also die Zahlen m_a so gewählt, dass

$$\sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{aj} = \varepsilon_j, \quad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

wo $|\varepsilon_j| < \varepsilon$. Dann hat man also nach (27)

$$f(t + A_1 + \sum_{a=1}^{n} 2\, m_a\, \omega_{a1},\ A_2 + \varepsilon_2, \ldots, A_n + \varepsilon_n) =$$
$$= f(t + A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

---

[1] Vgl. Jacobi a. a. O.; Kronecker, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884.

Setzt man hier

$$t = t_1 - \sum_{\alpha=1}^{n} 2\, m_\alpha\, \omega_{\alpha 1} = t_1 - P,$$

wo t_1 einen beliebigen Werth der Zeit bezeichnet, so wird hieraus

$$f(t_1 + A_1,\ A_2 + \varepsilon_2,\ \ldots,\ A_n + \varepsilon_n) = f(t_1 - P + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n).$$

Nun habe ich aber eben gezeigt, dass, wegen der Stetigkeit der Functionen f, diese bei einer unendlich kleinen Aenderung der Integrationsconstanten $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ eine ebenfalls unendlich kleine Aenderung erleiden. Es ist also

$$f(t_1 + A_1,\ A_2 + \varepsilon_1,\ \ldots,\ A_n + \varepsilon_n)$$

unendlich wenig von $f(t_1 + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$ verschieden, und demnach folgt aus der letzten Gleichung auch, dass die Functionen

$$f(t_1 + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$$

und

$$f(t_1 - P + A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n)$$

sich beliebig wenig von einander unterscheiden.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Coordinaten q_1, $q_2,\ \ldots,\ q_n$ zur Zeit t_1 und zur Zeit $t_1 - P$ beliebig wenig von einander verschieden sind.

Wenn also zur Zeit t_1 die Coordinaten die Werthe $q_1^{(1)},\ \ldots,\ q_n^{(1)}$ besitzen, so giebt es immer einen anderen Werth für t — und sogar, weil die Zahlen m_α auf unendlich viele verschiedene Weisen gewählt werden können, *unendlich viele andere Werthe für t —,* für welchen die Bahncurve beliebig nahe an den Punkt $q_1^{(1)},\ \ldots,\ q_n^{(1)}$ herankommt.

Man kann mit Stäckel weiter gehen und beweisen, dass man immer solche Werthe für die Zeit finden kann, für welche die Bahncurve beliebig nahe an *irgend einen Punkt* herankommt, der überhaupt

innerhalb des zulässigen Gebietes für die Coordinaten $q_1, \ldots, q_n$ liegt. Dieses Gebiet B ist nach dem Obigen so bestimmt, dass

$$a_i \overline{\gtreqless} q_i \leqq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist jetzt $q_1{}^0, q_2{}^0, \ldots, q_n{}^0$ irgend eine Stelle des Bereiches B, so gehört dazu nach (16) ein bestimmtes System von Werthen für $t + A_1, A_2, \ldots, A_n$, welche Werthe wir mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bezeichnen wollen.

Die Function

$$Q_i = f_i(B_1, B_2, \ldots, B_n)$$

stellt nun nicht nothwendiger Weise einen Werth von q_i dar. Wir wollen aber beweisen, dass man in dem Ausdruck für q_i

$$q_i = f_i(t + A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

immer einen solchen Werth für t finden kann, für welchen Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sich beliebig wenig von q_i unterscheidet.

Es gilt in der That die Relation (27). Nun folgt aber aus dem oben citirten Satze von Jacobi und Kronecker, dass man immer, sobald die Perioden ω_{ij} von einander unabhängig sind, die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ so bestimmen kann, dass

$$A_i + \sum_{\alpha=1}^{n} 2\, m_\alpha\, \omega_{\alpha i} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

sich beliebig wenig von B_i unterscheiden. Setzen wir dann

$$t = B_1 - A_1 - \sum_{\alpha=1}^{n} 2\, m_\alpha\, \omega_{\alpha 1},$$

so ist somit der Satz bewiesen.

Dieser Satz wird mengentheoretisch so ausgedrückt, dass *die Bahncurve den ganzen Bereich B überall dicht erfüllt.*

Die obigen Auseinandersetzungen erleiden nur dann eine Ausnahme, wenn Relationen von der Form (26) zwischen den Perioden

ω_{ij} bestehen. Die Bewegung wird dann, wie schon bewiesen ist, *periodisch.*

Die *Vertheilung der periodischen und nicht-periodischen Bahnen* ist eine Frage von der grössten Bedeutung für diese Bewegungen. Die *Stabilitätsfrage* steht in der That in einer gewissen Verbindung mit der Art dieser Vertheilung. Ich werde in einem folgenden Paragraphen Gelegenheit haben, auf diese Frage zurückzukommen.

Es ist in der obigen Auseinandersetzung angenommen, dass die Functionen $\Phi_i(q_i)$ in Formel (4) wirklich zwei Wurzeln a_i und b_i besitzen, zwischen denen die Veränderliche q_i beim Anfang der Bewegung liegt und dann auch immer verbleiben muss. Es kann auch vorkommen, dass dem nicht so ist, sondern dass eine oder mehrere von diesen Functionen für *keinen* reellen Werth von q_i verschwinden. Die Behandlung dieses Falles ist indessen der obigen Behandlung analog. Erstens folgt nämlich dann, dass das entsprechende q mit der Zeit stetig wächst (oder stetig abnimmt). Die Veränderliche q hat dann dieselbe Eigenschaft wie früher die entsprechende Hilfsgrösse w. Von besonderem Interesse ist der Fall, dass der Coefficient von dq periodisch ist. Wenn nämlich das vorliegende System das folgende ist

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} t + A_1 &= \int \frac{\varphi_{11}(q_1)\,dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \int \frac{\varphi_{n1}(q_n)\,dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_n &= \int \frac{\varphi_{1n}(q_1)\,dq_1}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} + \dots + \int \frac{\varphi_{nn}(q_n)\,dq_n}{\sqrt{\Phi_n(q_n)}} \end{aligned}\right.$$

und die Coefficienten von, beispielsweise, dq_1 die Eigenschaft haben, für keinen Werth von q_1 zu verschwinden oder unendlich zu werden und ausserdem periodisch sind mit der Periode 2π, so folgt, dass, indem q_1 um 2π anwächst, $A_1, \dots, A_n$ um constante Grössen $\omega_{11}, \dots, \omega_{1n}$ anwachsen werden. Die Grösse q_1 hat dann hier dieselbe Eigenschaft wie w_1 in den Gleichungen (16).

Ist

$$\frac{\varphi_{1i}(q_1)}{\sqrt{\Phi_1(q_1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

eine Constante, dann ist die Periode *willkürlich.*

Es kommt in der Mechanik öfters vor, dass die gegenseitige Lage der beweglichen Körper unverändert bleibt, wenn eine oder mehrere Grössen q_i (sogenannte Winkelgrössen) um Vielfaches von 2π vermehrt werden. Man führt dann statt diesen q_i die Hilfsgrössen

$$\sin q_i = x_i$$

ein, und die Discussion wird dann mit der oben gegebenen vollständig analog.

Beispiel. *Das conische Pendel.*

Nimmt man die Z-Achse vertical, bezeichnet mit θ den Winkel, den die Projection des Pendels auf die XY-Ebene mit einer festen Linie macht, mit z die Z-Coordinate, mit l die Länge des Pendels, mit g die Acceleration der Schwerkraft und endlich mit c und c' zwei Integrationsconstanten, dann sind die Veränderungen von z und θ durch folgende Formeln gegeben (vgl. z. B. Despeyrous: Cours de Mécanique, II. S. 70)

$$(29) \qquad \begin{cases} dt = \dfrac{l\,dz}{\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}}, \\[2ex] 0 = d\theta + \dfrac{c\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}} \end{cases}$$

und aus dieser Form der Differentialgleichungen können wir unmittelbar schliessen, dass es sich hier um eine *bedingt periodische Bewegung* handelt.

Für $c = 0$ erhält man das gewöhnliche Pendelproblem in der Ebene. Schliessen wir diesen Fall aus, so findet man leicht, dass die Gleichung

$$(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2 = 0$$

drei reelle Wurzeln hat, eine Wurzel negativ und numerisch grösser als l, die beiden übrigen numerisch kleiner als l.

Die Coordinate z muss also immer zwischen den beiden letzten Wurzeln bleiben. Hieraus folgt nun, dass $l^2 - z^2$ niemals Null werden kann. Die Gradzahl der Wurzeln ist Eins, und wir können unmittelbar die Formeln (18) u. f. anwenden.

So oft z denselben Werth wieder erhält und θ um ein Vielfaches von 2π gleichzeitig anwächst, kehrt das Pendel in dieselbe Lage zurück. Setzen wir also

$$(30) \qquad y = \cos\theta,$$

so ist die Bewegung periodisch, wenn y und z ihre ursprünglichen Werthe wiedererhalten. In diesen Coordinaten lauten nun die Differentialgleichungen nach der Integration

$$(31)\quad \begin{cases} t + A_1 = \int \frac{l\,dz}{\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}}, \\ A_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} + \int \frac{c\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$h(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2,$$

und bezeichnen mit α und β ($\alpha > \beta$) die beiden Wurzeln von $h(z) = 0$, die numerisch kleiner als l sind, und mit $-\gamma$ die dritte Wurzel, so hat man also in den Formeln (6) und den folgenden zu setzen

$$F_{11} = 0; \qquad F_{21} = \frac{l}{\sqrt{2g(z+\gamma)}};$$

$$F_{12} = 1; \qquad F_{22} = \frac{c\,l}{(l^2 - z^2)\sqrt{2g(z+\gamma)}}.$$

Für die Perioden ω_{ij} erhält man den Ausdruck

$$\omega_{11} = 0; \qquad \omega_{21} = \int_\alpha^\beta \frac{l\,dz}{\sqrt{h(z)}};$$

$$\omega_{12} = -\pi; \quad \omega_{22} = \int_\alpha^\beta \frac{c\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{h(z)}}$$

und für die Determinante Ω erhält man den Werth

$$\Omega = \pi\,\omega_{21},$$

der also von Null verschieden ist.

Die Veränderlichen u_1 und u_2 in (21) sind durch folgende Formeln bestimmt

$$\pi(t + A_1) = \qquad\qquad \omega_{21} u_2,$$

$$\pi A_2 = -\pi u_1 + \omega_{22} u_2,$$

so dass

$$u_1 = \frac{\omega_{22}}{\omega_{21}}(t + A_1) - A_2,$$

$$u_2 = \frac{\pi}{\omega_{21}}(t + A_1).$$

Die Coordinaten y und z lassen sich als doppeltperiodische Functionen der beiden Veränderlichen u_1 und u_2 darstellen mit Hilfe der Gleichungen (24) und (24*), und es verdient bemerkt zu werden, dass diese Darstellungen bedeutende Vorzüge besitzen vor der gewöhnlichen Lösung dieses Problems unter Anwendung von elliptischen Functionen.

Die Bewegung wird nach (26) rein periodisch, wenn

$$0 = m_1 \pi - m_2 \omega_{22},$$

und die Periode $2T$ wird dann

$$2T = 2 m_2 \omega_{21}.$$

In diesen Formeln ist die vollständige Theorie des sphärischen Pendels enthalten.

DRITTER ABSCHNITT

BEWEGUNG EINES PUNKTES, DER VON ZWEI FESTEN CENTREN NACH DEM NEWTON'SCHEN GESETZ ATTRAHIRT WIRD

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

Ich werde mich im Folgenden auf den Fall beschränken, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet. Es verdient indessen bemerkt zu werden, dass auch der allgemeine Fall — in drei Dimensionen — in vollständig ähnlicher Weise behandelt werden kann.

Bedient man sich der elliptischen Coordinaten λ und μ in I § 7, so wird

$$2T = (\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right], \tag{1}$$

$$U = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}\left[(K + K')\lambda - (K - K')\mu\right]. \tag{2}$$

Wollen wir die Differentialgleichungen in canonischer Form schreiben, so können wir setzen

$$q_1 = \lambda, \quad q_2 = \mu$$

und bekommen dann nach I § 8

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}\lambda',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}\mu',$$

so dass

$$2T = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[(q_1^2 - c^2)p_1^2 + (c^2 - q_2^2)p_2^2\right],$$

$$U = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}\left[(K + K')q_1 - (K - K')q_2\right].$$

Die canonischen Differentialgleichungen werden nun

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d q_1}{d t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{d p_1}{d t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \\[2ex] \dfrac{d q_2}{d t} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, & \dfrac{d p_2}{d t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \end{cases}$$

wo

$$(4)\qquad H = T - U.$$

Die Differentialgleichungen sind offenbar von der Form, die für die Anwendung des Theorems von Stäckel erforderlich ist. In der That, wenn man setzt (II § 1 (10))

$$\varphi_{11} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - c^2}, \qquad \varphi_{21} = \frac{q_2^2}{q_2^2 - c^2},$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{q_1^2 - c^2}, \qquad \varphi_{22} = \frac{1}{q_2^2 - c^2},$$

$$\psi_1 = \frac{K + K'}{(q_1^2 - c^2)}\, q_1, \quad \psi_2 = \frac{K - K'}{(q_2^2 - c^2)}\, q_2,$$

so dass

$$\Delta = \frac{q_1^2 - q_2^2}{(q_1^2 - c^2)(q_2^2 - c^2)},$$

so erhalten wir die obige Form.

Führen wir die Bezeichnungen λ und μ (statt q_1 und q_2) wieder ein, so bekommt man also nach II § 1 (19) und (19*) die folgenden Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{2(\lambda^2 - c^2)((K+K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha)}} + \int \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{2(\mu^2 - c^2)((K-K')\mu + h\mu^2 + \alpha)}} = t + \beta_1, \\[3ex] \displaystyle\int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(\lambda^2 - c^2)((K+K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{2(\mu^2 - c^2)((K-K'^2)\mu + h\mu^2 + \alpha)}} = \beta_2, \end{cases}$$

übereinstimmend mit I § 7 (43), und die intermediären Integrale lauten:

$$(5^*)\qquad \begin{cases} (\lambda^2 - \mu^2)\dfrac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)\,((K + K')\,\lambda + h\,\lambda^2 + \alpha)}, \\[2ex] (\lambda^2 - \mu^2)\dfrac{d\mu}{dt} = -\sqrt{2(\mu^2 - c^2)\,((K - K')\,\mu + h\,\mu^2 + \alpha)}. \end{cases}$$

Die charakteristische Function H ist von t unabhängig und man hat somit hier das Integral

$$H = h$$

oder

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right] = \\ = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}\left[(K + K')\lambda - (K - K')\mu\right] + h. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen findet man, dass die Grössen λ und μ im Allgemeinen doppeltperiodische Functionen von $t + \beta_1$, und β_2 sind. Für die Perioden ω_{ij} erhält man nach II § 3 (20) die folgenden Werthe

$$(7)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad \omega_{21} = \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \\ \omega_{12} = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad \omega_{22} = \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(8)\quad \begin{cases} R(\lambda) = 2(\lambda^2 - c^2)\left((K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha\right), \\ S(\mu) = 2(\mu^2 - c^2)\left((K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha\right), \end{cases}$$

und a_1, b_1 und a_2, b_2 bez. zwei Wurzeln der Gleichungen $R(\lambda) = 0$ und $S(\mu) = 0$ bezeichnen.

Man findet, dass die Determinanten Δ und Ω in II § 3 von Null verschieden sind, so oft nicht $\lambda = \mu$, in welchem Fall ein Zusammenstoss stattfindet.

Führt man die Hilfsgrössen u_1 und u_2 nach II § 3 (21) ein, so hat man

$$\pi(t + \beta_1) = \omega_{11} u_1 + \omega_{21} u_2,$$

$$\pi\beta_2 = \omega_{12} u_1 + \omega_{22} u_2$$

oder

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega u_1 = \quad \pi \omega_{22}(t+\beta_1) - \pi \omega_{21}\beta_2, \\ \Omega u_2 = -\pi \omega_{12}(t+\beta_1) + \pi \omega_{11}\beta_2, \end{cases}$$

und λ und μ werden nun doppeltperiodische Functionen von u_1 und u_2 mit der Periode 2π, die sich in FOURIER'sche Reihen nach den Vielfachen von u_1 und u_2 entwickeln lassen.

Die Bewegung ist *in der Zeit* periodisch, so oft ω_{21} und ω_{22} mit einander *commensurabel* sind, so dass

$$(10)\qquad 0 = m_1 \omega_{12} + m_2 \omega_{22},$$

wo m_1 und m_2 ganze Zahlen bezeichnen, und für die Periode $2T$ erhält man den Werth

$$(10^*)\qquad 2T = 2m_1 \omega_{11} + 2m_2 \omega_{21}.$$

Wenn die Wurzeln der Gleichungen $R(\lambda) = 0$ oder $S(\mu) = 0$ *nicht einfache Wurzeln* sind, so treten Limitationsbewegungen auf.

Ausser diesen Fällen können bei verschiedenen Werthen von h und α nur zwei Fälle vorkommen, nämlich 1) dass λ oder μ einen *constanten* Werth erhalten, oder 2) dass jede Bewegung unmöglich ist.

In Bezug auf die Grössen λ und μ erinnere ich an ihre Definition

$$2\lambda = r + r',$$

$$2\mu = r - r',$$

aus welcher folgt, dass die folgenden Ungleichheiten immer erfüllt sein müssen

$$(11)\qquad \lambda \geqq c \geqq \mu \geqq -c.$$

Ich erinnere weiter daran, dass λ die halbe grosse Achse einer Ellipse bedeutet, deren Foci in den zwei festen Centren liegen und welche durch den beweglichen Punkt geht. Die Grösse μ bezeichnet die entsprechende Bestimmungsgrösse einer Hyperbel. $2c$ ist der Abstand zwischen den beiden Foci.

Wenn $\lambda = c$, so bedeutet das, dass die Foci mit dem Endpunkt der grösseren Achse der Ellipse zusammenfallen, d. h. die Ellipse geht für $\lambda = c$ in die gerade Linie $K'K$ über. Folglich muss immer für $\lambda = c$ der bewegliche Punkt — ich werde ihn kurzweg den *Planeten* nennen — sich auf der Linie $K'K$ befinden.

Ist dagegen $\mu = c$, so besteht die Hyperbel aus demjenigen Theil der negativen X-Achse, der jenseits der Masse K' liegt. Für $\mu = -c$ erhält man den entsprechenden Theil der *positiven* X-Achse jenseits der Masse K. Für $\mu = \pm c$ befindet sich also der Planet auf einem von diesen Theilen der X-Achse.

Ist $\mu = 0$, so fällt die Hyperbel mit der Y-Achse zusammen.

Sind beim Anfang der Bewegung die Coordinaten des Planeten λ_0 und μ_0, so muss nach (5*)

$$(12)\quad \begin{cases} L(\lambda_0) = (K + K')\lambda_0 + h\lambda_0^2 + \alpha \geqq 0, \\ M(\mu_0) = (K - K')\mu_0 + h\mu_0^2 + \alpha \leqq 0 \end{cases}$$

sein, wozu kommt, dass λ_0 und μ_0 auch den Ungleichheiten (11) Genüge thun müssen. *Die Relationen (11) und (12) müssen übrigens nicht nur beim Anfang der Bewegung, sondern immer erfüllt sein bei allen mit dem Problem überhaupt vereinbaren Werthepaaren* (λ, μ).

Ich gehe jetzt zu der näheren Betrachtung der verschiedenen Bewegungszustände über. Es scheint dann geeignet zu sein, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) h negativ,
2) h positiv,
3) $h = 0$,
4) Limitationsbewegungen,
5) rein periodische Bewegungen.

In 1) und 2) setze ich voraus, dass die Wurzeln der Gleichungen $R(\lambda) = 0$ und $S(\lambda) = 0$ *einfach* sind.

§ 2. Die Constante h der lebendigen Kraft negativ. Librationsfälle.

Die Gleichung $R(\lambda) = 0$ hat immer die beiden Wurzeln $\lambda = \pm c$. Da wir hier annehmen wollen, dass die Constante h negativ ist, so setzen wir

$$(1) \qquad h = -h_1,$$

wo also h_1 eine *positive* Grösse bezeichnet. Setzen wir nun

$$(2) \qquad L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1\lambda^2 + \alpha,$$

so muss nach § 1 (12) immer

$$(3) \qquad L(\lambda) \geqq 0$$

sein. Könnte λ über alle Grenzen wachsen, so würde offenbar, für hinreichend grosse Werthe von λ, $L(\lambda)$ negativ werden, was nach (3) nicht erlaubt ist. Hieraus folgt, dass für negatives h die Grösse λ immer eine endliche obere Grenze haben muss. *Der Planet kann sich also in diesem Fall nicht beliebig weit von K' und K entfernen.*

Wir nennen nun r_1 und r_2 die Wurzeln der Gleichung $L(\lambda) = 0$ und haben also

$$(4) \qquad L(\lambda) = h_1(r_1 - \lambda)(\lambda - r_2),$$

wo für *reelle* Werthe von r_1, r_2 angenommen werden soll, dass

$$(5) \qquad r_1 > r_2.$$

Man kann dann vier Fälle unterscheiden:

r_1 und r_2 imaginär,
r_1 und r_2 reell, aber kleiner als c,
r_1 reell und grösser als c,
r_1 und r_2 reell und grösser als c.

Die beiden ersten von diesen Fällen geben aber zu ähnlichen Bewegungszuständen Veranlassung und mögen also gleichzeitig behandelt werden. In beiden Fällen kann nämlich $L(\lambda)$ das Zeichen

nicht wechseln, weil keine reelle Wurzel, die grösser als c ist, existirt. In beiden Fällen muss dann nothwendigerweise $L(\lambda)$ *negativ* bleiben, weil $L(+\infty)$ negativ ist.

Wir unterscheiden also folgende drei Fälle

a) r_1 und r_2 entweder imaginär, oder reell und kleiner als c,

b) $r_1 > c > r_2$,

c) $r_1 > r_2 > c$.

Setzt man

$$M(\mu) = (K - K')\mu - h_1\mu^2 + \alpha, \tag{6}$$

und nennt die Wurzeln der Gleichung

$$M(\mu) = 0 \tag{7}$$

ϱ_1 und ϱ_2, wo für reelle Wurzeln $\varrho_1 > \varrho_2$, so ist also

$$M(\mu) = h_1(\varrho_1 - \mu)(\mu - \varrho_2),$$

und man muss immer haben

$$M(\mu) \leqq 0. \tag{8}$$

Hier haben wir nun vier Fälle zu untersuchen:

α) ϱ_1 und ϱ_2 imaginär,

β) ϱ_1 und ϱ_2 reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c,

γ) $\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c$,

δ) $c > \varrho_1 > \varrho_2 > -c$.

In γ) ist auch der Fall

$$c > \varrho_1 > -c > \varrho_2$$

einbegriffen, wie unten näher erörtert wird.

Indem nun ein jeder von den Fällen a), b) und c) mit den letzteren vier combinirt wird, erhält man also hier 12 verschiedene Fälle, die wir nach einander betrachten wollen.

Fall I a. Die Wurzeln r_1 und r_2 entweder imaginär, oder reell und kleiner als c.

Es ist nach § 1 (5*)

$$(9) \qquad (\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda)}.$$

Da nun in diesem Falle $L(\lambda)$ stets negativ bleibt und ausserdem λ nicht kleiner als c werden kann, so kann man diese Gleichung nur dadurch befriedigen, dass man setzt

$$(10) \qquad \lambda \equiv c.$$

Der Planet muss also immer auf der Linie $K'K$ bleiben. Die Bewegung wird geradlinig. Je nach den Werthen von ϱ erhalten wir nun:

Fall I a α. ϱ_1 und ϱ_2 imaginär.

Die Function $M(\mu)$ wechselt also für reelle Werthe von μ nicht das Zeichen und ist also *negativ*, weil sie für hinreichend grosse Werthe von μ negativ wird.

Es ist

$$(11) \qquad (\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2)M(\mu)},$$

und da nun $M(\mu)$ negativ ist, so würde μ zwischen $+c$ und $-c$ periodisch schwanken. Da aber für $\mu = \pm c$ und $\lambda = c$ der Planet mit einer von den Massen K oder K' zusammenstösst, so hört hier die Gültigkeit der Differentialgleichungen auf.

Der Fall I a α ist also dadurch charakterisirt, dass der *Planet sich beim Anfang der Bewegung auf der Linie K′K befindet und seine Anfangsgeschwindigkeit längs der X-Achse liegt. Der Planet bewegt sich in dieser Richtung, bis ein Zusammenstoss mit K′ oder K stattfindet.*

Fall I a β. ϱ_1 und ϱ_2 reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c.

Die Function $M(\mu)$ ändert also während der Bewegung nicht das Zeichen.

Ist $M(\mu)$ negativ, so hat man dieselbe Bewegung wie in I a α. Ist dagegen $M(\mu)$ positiv, so folgt aus (11), dass μ nothwendigerweise identisch gleich $+c$ oder $-c$ sein muss. Der Planet hat also nun dieselben Coordinaten wie eine von den Massen und eine Bewegung ist nicht möglich.

Fall I a γ. $\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c$.

Es ist

$$(\mu^2 - c^2) M = (\mu^2 - c^2) h_1 (\varrho_1 - \mu)(\mu - \varrho_2). \tag{12}$$

Damit dieser Ausdruck positiv bleibe, muss offenbar

$$-c \leqq \mu \leqq \varrho_2$$

sein. Wenn beim Anfang der Bewegung $\frac{d\mu}{dt}$ positiv ist, so wächst μ bis zum Werthe $\mu = \varrho_2$, kehrt dann um und stösst zuletzt mit der Masse K zusammen.

Fall I a δ. $c > \varrho_1 > \varrho_2 > -c$.

Aus (12) folgt, dass man entweder hat

$$-c \leqq \mu \leqq \varrho_2,$$

oder

$$\varrho_1 \leqq \mu \leqq c.$$

Der Planet stösst mit K oder K' zusammen.

Als eine fünfte Möglichkeit könnte man eigentlich den Fall betrachten, dass

$$c > \varrho_1 > -c > \varrho_2,$$

was indessen offenbar mit $I a \gamma$ ähnlich ist, nur dass der Planet hier mit der Masse K' zusammenstossen muss.

Wir wenden uns nun zu

Fall Ib. $r_1 > c > r_2$.

Aus

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2) h_1 (r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)} \tag{13}$$

folgt, dass

$$r_1 \geqq \lambda \geqq c.$$

Ist $d\lambda$ beim Anfang der Bewegung positiv, so wächst λ, bis der Werth $\lambda = r_1$ erreicht ist, fängt dann an abzunehmen, und nimmt continuirlich ab bis $\lambda = c$, um dann wieder zu wachsen. Es findet also *Libration in* λ statt. Geometrisch gesprochen muss der Planet sich immer innerhalb derjenigen Ellipse befinden, die in K' und K ihre Foci hat, und deren halbe grosse Achse gleich r_1 ist. Die nähere Bestimmung der Bewegung hängt von den Werthen der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 ab.

Fall I b α. ϱ_1 *und* ϱ_2 *imaginär.*

Die Function $M(\mu)$ wechselt also das Zeichen nicht und bleibt negativ. Aus (11) folgt nun, dass μ zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$ schwankt. Es tritt also Libration sowohl in λ wie in μ ein, und wir können die Resultate über bedingt periodische Bewegungen hier anwenden. *Die Bahncurve besteht also entweder aus einer geschlossenen Linie* — etwa in der Form einer Lemniscate — *oder sie erfüllt den ganzen von der Ellipse* r_1 *eingeschlossenen Raum überall dicht.*

Für die Elementarperioden ω_{ij} hat man hier die Werthe

$$\omega_{11} = \int_c^{r_1} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}; \qquad \omega_{21} = \int_{-c}^{+c} \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{S(\mu)}};$$

$$\omega_{12} = \int_c^{r_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}; \qquad \omega_{22} = \int_{-c}^{+c} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

Die Grössen λ und μ lassen sich als beständig convergirende Fourier'sche Reihen nach den Vielfachen der beiden durch § 1 (9) bestimmten Argumente u_1 und u_2 darstellen.

Fall I b β. ϱ_1 und ϱ_2 *reell und dem absoluten Betrag nach grösser als* c.

Die Function $M(\mu)$ wechselt also während der Bewegung nicht das Zeichen. Wenn $M(\mu)$ *negativ* ist, so fallen wir auf *I b α* zurück. Ist dagegen $M(\mu)$ *positiv*, so folgt nach (11), dass

$$\mu \equiv +c \text{ oder } -c.$$

Die Bewegung findet auf demjenigen Theil der X-Achse statt, der, vom Coordinatennullpunkt gerechnet, jenseits der Massen K' und K liegt. Der Planet stösst zuletzt mit einer von den Massen zusammen.

Fall $Ib\gamma$. $\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c$.

Wie im Falle $Ia\gamma$ findet man nun, dass

$$-c \leqq \mu \leqq \varrho_2.$$

Es findet also *Libration* in μ, sowohl wie in λ, statt. Die Bahn liegt innerhalb des um K gelegenen Raumes, der von der Ellipse $\lambda = r_1$ und der Hyperbel $\mu = \varrho_2$ begrenzt wird. Die Bewegung ist also bedingt periodisch. Für die Elementarperioden ω_{11} und ω_{12} erhält man dieselben Ausdrücke wie in $Ib\alpha$, die Werthe der übrigen sind

$$\omega_{21} = \int_{-c}^{\varrho_2} \frac{\mu^2 \, d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}; \qquad \omega_{22} = \int_{-c}^{\varrho_2} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

Der Körper wird also hier zu einem *Satelliten* der Masse K. Es ist hier vom grössten Interesse zu bemerken, dass die Bahncurve des Satelliten den zulässigen Bereich überall dicht erfüllt, und *dass es demnach keine untere Grenze für den Abstand des Satelliten von der Masse K giebt.* Eine obere Grenze ist aber vorhanden.

Zu diesem Fall gehört auch der, dass

$$c > \varrho_1 > -c > \varrho_2.$$

Der Körper bewegt sich dann als Satellit um die Masse K'.

Fall $Ib\delta$. $c > \varrho_1 > \varrho_2 > -c$.

Der Körper wird zu einem Satelliten, der sich entweder um K' oder um K bewegt. Die Behandlung ist dieselbe wie im vorigen Falle.

Fall Ic. *Sowohl* r_1 *wie* r_2 *grösser als* c.

Nach (13) folgt nun, dass entweder $\lambda \equiv c$, welchen Fall wir übergehen können, oder

$$r_2 \leqq \lambda \leqq r_1.$$

Die Bewegung findet innerhalb zwei Ellipsen statt, deren halbe grosse Achsen gleich r_2 und r_1 sind. Die Grösse λ besitzt eine Librationsbewegung zwischen den Grenzen r_1 und r_2. Die nähere Bestimmung der Bewegung hängt von den Werthen der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 ab.

Fall Ic α. ϱ_1 *und* ϱ_2 *imaginär.*

Wie in Fall *Ib α*, so folgt hier, dass μ zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$ schwankt. Der Planet bewegt sich in einer Bahn, welche die beiden Massen K' und K umschliesst, und *welche entweder geschlossen ist, oder den zwischen den beiden Ellipsen* r_1 *und* r_2 *eingeschlossenen Raum überall dicht erfüllt.*

Fall Ic β. ϱ_1 *und* ϱ_2 *reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c.*

Es ist nach der Voraussetzung $r_1 > r_2 > c$ und

$$L(r_1) = L(r_2) = 0\,.$$

Da weiter $L(+\infty)$ negativ ist, so muss

$$L(c) < 0\,,$$

sein, d. h.

$$(K + K')c - h_1 c^2 + \alpha < 0\,.$$

Nun ist aber

$$M(c) = (K - K')c - h_1 c^2 + \alpha < L(c).$$

Es muss also auch $M(c)$ *negativ* sein. Der Voraussetzung nach sind aber die Wurzeln der Gleichung $M(\mu) = 0$ beide reell und numerisch grösser als c. Es muss also während der Bewegung — für welche immer die Bedingung $|\mu| \leqq c$ stattfindet — $M(\mu)$ negativ sein, und man findet demnach, dass wir auf den Fall *Ic α* zurückgeführt werden.

Fall Ic γ. $\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c\,.$

Dieser Fall kann nicht vorkommen. In der That findet man, wie im vorigen Falle, dass

$$M(c) < L(c) < 0\,.$$

Nun ist aber weiter

$$M(-c) < M(c).$$

Die Function $M(\mu)$ ist also von der Beschaffenheit, dass sie für $\mu = +c$ und $\mu = -c$ *negativ* ist. Daraus folgt aber, dass die Gleichung

$$M(\mu) = 0$$

entweder *zwei* Wurzeln oder *keine* Wurzel zwischen den Werthen $\mu = +c$ und $\mu = -c$ hat, was der Voraussetzung widerstreitet.

Es können auch nicht *zwei* Wurzeln zwischen diesen Grenzen existiren. Lassen wir nämlich x irgend eine reelle und positive Grösse bezeichnen, die kleiner als c ist, dann wissen wir, dass der Voraussetzung gemäss $L(x)$ negativ ist. Nun ist aber

$$M(x) - L(x) = -2K'x,$$

und also muss $M(x)$ auch negativ sein für alle positiven x, welche kleiner als c sind. Andererseits ist

$$M(-x) = -(K - K')x - h_1 x^2 + \alpha = M(x) - 2(K - K')x,$$

und da wir hier $K > K'$ angenommen haben, so muss auch $M(-x)$ negativ sein.

Es kann also hier (wenn $r_1 > r_2 > c$) *keine* Wurzel zwischen $+c$ und $-c$ vorkommen.

Fall $Ic\delta$, dass $c_1 > \varrho_1 > \varrho_2 > c$, kann also nicht vorkommen.

§ 3. Die Constante h positiv.

Wir gehen nun zu der zweiten Hauptabtheilung über, nämlich zu dem Fall, *dass die Constante h positiv ist,* und machen hier dieselben Unterabtheilungen in Bezug auf die Wurzeln.

Da nun

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha, \tag{1}$$

und da weiter, der Natur der Bewegung gemäss, immer $L(\lambda)$ für $\lambda > c$ *positiv* sein muss (oder Null), so folgt daraus, dass nun λ beliebig grosse Werthe annehmen kann. Es ist sogar *nothwendig*, dass λ mit der Zeit in's Unendliche wächst. Da nämlich

$$(2)\quad (\lambda^2 - \mu^2)^2 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = 2(\lambda^2 - c^2) L(\lambda) = 2(\lambda^2 - c^2) h(\lambda - r_1)(\lambda - r_2),$$

oder

$$(\lambda^2 - \mu^2)^2 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = 2h(\lambda + c)(\lambda - c)(\lambda - r_1)(\lambda - r_2),$$

so findet man, dass, wenn wir von zusammenfallenden Wurzeln vorläufig absehen, λ entweder grösser als die drei Wurzeln

$$c, \quad r_1, \quad r_2$$

sein muss, oder kleiner als *alle drei*. Nun kann aber niemals λ kleiner als c sein, also muss immer λ grösser als die grösste von diesen drei Wurzeln sein, oder wenigstens gleich dieser Wurzel. Ist also beim Anfang der Bewegung $d\lambda$ negativ, so nimmt λ ab, bis diese grösste Wurzel erreicht ist. Dann wechselt $d\lambda$ das Zeichen und λ wächst dann continuirlich in's Unendliche. Von dieser Art sind alle Bewegungen, die bei positivem h auftreten. Man hat es hier also nur mit der Bestimmung des *Minimalwerthes* von λ zu thun.

Die Bewegung wird ausserdem von den Werthen der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 beeinflusst.

Fall IIa. r_1 *und* r_2 *entweder imaginär, oder reell und kleiner als* c.

Die untere Grenze von λ ist hier gleich c. Je nach den Werthen von ϱ_1 und ϱ_2 erhalten wir:

Fall IIa α. ϱ_1 *und* ϱ_2 *imaginär.*

$M(\mu)$ ist stets *positiv*, weil $M(\infty)$ positiv ist. Es muss dann nothwendigerweise

$$\mu \equiv +c \text{ oder } -c$$

sein. Der Planet bewegt sich auf der X-Achse und stösst mit einer

von den Massen K oder K' zusammen, oder entfernt sich in's Unendliche, je nach dem Zeichen von $d\lambda$ beim Anfang der Bewegung.

Fall IIa β. ϱ_1 und ϱ_2 reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c.

Ist $M(\mu)$ auch hier positiv, so wird die Bewegung wie im vorigen Falle. Ist $M(\mu)$ dagegen negativ, so kann der Planet *einmal* die Linie $K'K$ schneiden und entfernt sich dann in immer grösseren Windungen von $K'K$, indem μ periodisch zwischen $+c$ und $-c$ schwankt.

Fall IIa γ. $\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c$ (*oder* $c > \varrho_1 > -c > \varrho_2$).

Der Planet macht einen Umlauf um K' (bez. K) und entfernt sich dann allmählich in's Unendliche, indem derselbe periodisch oscillirt zwischen der negativen (bez. positiven) X-Achse und der Hyperbel $\mu = \varrho_2$ (bez. ϱ_1).

Fall IIa δ. $c > \varrho_1 > \varrho_2 > -c$.

Hier oscillirt μ periodisch zwischen den Werthen ϱ_1 und ϱ_2. Der Planet durchschneidet die Linie $K'K$ und entfernt sich dann in's Unendliche, zwischen den beiden Hyperbeln ϱ_1 und ϱ_2 periodisch oscillirend.

Fall IIb. $r_1 > c > r_2$.

Die untere Grenze für λ ist hier gleich r_1. Der Planet nähert sich der Ellipse $\lambda = r_1$, tangirt diese und entfernt sich dann, indem λ continuirlich wächst, in's Unendliche. Die Constante α muss hier negativ sein.

Beide Wurzeln r_1 und r_2 können für positives h nicht grösser als c sein. Man hat nämlich

$$r_1 = -\frac{K+K'}{2h} + \sqrt{\frac{(K+K')^2}{4h^2} - \frac{\alpha}{h}}$$

$$r_2 = -\frac{K+K'}{2h} - \sqrt{\frac{(K+K')^2}{4h^2} - \frac{\alpha}{h}}.$$

Wenn die Wurzeln reell sind, muss also r_2 nothwendigerweise *negativ* sein.

Fall IIb α. Die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 imaginär oder reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c.

$M(\mu)$ wird hier stets negativ, weil $M(0) = \alpha$ negativ ist. Die Grösse μ oscillirt zwischen $+c$ und $-c$. Der Planet umläuft, indem er sich entfernt, die Massen K und K' in immer grösseren Windungen. Die Bahn ist eine Art nach aussen laufender Spirale.

Fall IIb β. Eine von den Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2, oder beide, kleiner als $+c$, aber grösser als $-c$.

Dieser Fall kann nicht vorkommen. Da nämlich nach der Voraussetzung $r_1 > c$ ist, und unmittelbar ersichtlich ist, dass der absolute Betrag von r_2 grösser als der absolute Betrag von r_1 ist, so muss r_2 negativ und numerisch grösser als c sein. Die Function $L(x)$ verschwindet also nicht für solche x-Werthe, die zwischen $+c$ und $-c$ liegen, und bleibt für solche Werthe negativ. Nun ist

$$M(x) = L(x) - 2K'x,$$

aus welcher Gleichung folgt, dass $M(x)$ für *positive* x auch negativ (und von Null verschieden) sein muss. Andererseits ist

$$M(-x) = M(x) - 2(K - K')x,$$

und somit ist $M(-x)$ in dem betreffenden Bereiche auch negativ. Es kann also keine von den Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 zwischen $+c$ und $-c$ liegen.

§ 4. h gleich Null.

Es ist nun

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda + \alpha = (K + K')(\lambda - r),$$
$$M(\mu) = (K - K')\mu + \alpha = (K - K')(\mu - \varrho).$$

Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden in Bezug auf die Werthe von r, nämlich

$$1)\ r < c; \quad 2)\ r > c.$$

Fall IIIa. $r < c$.

Die Function $L(\lambda)$ bleibt während der Bewegung positiv. Die Grösse λ kann also continuirlich abnehmen, bis sie den Wert $\lambda = c$ erreicht hat. Dann fängt λ an zu wachsen und wächst continuirlich in's Unendliche.

Es ist

$$r = -\frac{\alpha}{K+K'} < c,$$

$$\varrho = -\frac{\alpha}{K-K'}.$$

Der absolute Betrag von ϱ kann demnach, je nach den Umständen, kleiner oder grösser als c werden.

Fall IIIa α. $|\varrho| > c$.

Die Function $M(\mu)$ bleibt hier immer negativ und da

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2)M(\mu)},$$

so muss μ zwischen $+c$ und $-c$ periodisch schwanken.

Der Planet schneidet *einmal* die Linie $K'K$ und entfernt sich dann in's Unendliche in einer nach aussen laufenden Spirale, welche die Linie $K'K$ umschlingt. Der Fall ist $IIb\,\alpha$ ähnlich.

Fall IIIa β. $|\varrho| < c$.

Damit $M(\mu)$ negativ werde, muss hier μ kleiner als ϱ sein. Die Grösse μ schwankt dann periodisch zwischen ϱ und $-c$. Der Planet durchschneidet *einmal* die Linie KK' und entfernt sich in's Unendliche, indem er periodisch zwischen der Hyperbel und der positiven X-Achse hin und her schwankt. Die Bewegung ist sehr eigenthümlich und unerwartet.

Fall IIIb. $r > c$.

Die untere Grenze für λ wird hier gleich r, und die Bewegung vollzieht sich ausserhalb der Ellipse $\lambda = r$. Die Constante α muss

hier negativ sein ($= -\alpha_1$), und man hat, nach der Voraussetzung

$$\frac{\alpha_1}{K + K'} > c.$$

Man muss dann auch haben

$$\varrho = \frac{\alpha_1}{K - K'} > c,$$

so dass nur ein Fall zu betrachten ist.

Fall IIIbα. $r > c. \quad \varrho > c.$

$M(\mu)$ bleibt während der Bewegung immer negativ, und μ schwankt also periodisch zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$. Der Planet tangirt die Ellipse $r = c$ und entfernt sich dann in's Unendliche in einer nach aussen laufenden Spirale, welche die betreffende Ellipse umschlingt.

§ 5. Zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ oder der Gleichung $S(\mu) = 0$ fallen zusammen. Limitationsbewegungen.

Fallen zwei Wurzeln zusammen, so entstehen Limitationsbewegungen. Wir unterscheiden folgende Fälle:

A) $r_1 = r_2 > c$,
B) $r_1 > r_2 = c$,
C) $r_1 = c > r_2$,
D) $r_1 = c = r_2$.

Die verschiedenen Fälle, in denen zwei Wurzeln der Gleichung $S(\mu) = 0$ zusammenfallen, werden wir später untersuchen.

Fall IV A. $r = r_1 = r_2 > c.$

Wir haben

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)h(\lambda - r)^2}.$$

Für die Möglichkeit einer Bewegung ist erforderlich, dass h positiv ist oder $\lambda = r$. Den letzteren Fall werde ich später untersuchen.

Wir nehmen demnach h positiv an.

Da die Gleichung

$$(K + K')\lambda + h\lambda^2 + \alpha = 0$$

die Doppelwurzel $\lambda = r$ besitzt, so ist

$$(K + K')r + h r^2 + \alpha = 0,$$

$$(K + K') + 2hr \qquad = 0,$$

also

$$r = -\frac{K + K'}{2h}.$$

Die Wurzel muss mithin negativ sein, kann also nicht grösser als c sein. Dieser Fall kann somit nur vorkommen, wenn h negativ ist, und dann muss λ gleich r sein. Er wird im nächsten Paragraphen untersucht werden.

Fall IV B. $r_1 > r_2 = c$.

Es ist hier

$$L(c) = (K + K')c + hc^2 + \alpha = 0,$$

und man hat

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = (\lambda - c)\sqrt{2(\lambda + c)h(\lambda - r_1)}.$$

Ist h *positiv*, so muss $\lambda > r_1$ sein, und wir kommen auf den Fall *II b* zurück.

Wir nehmen also an, dass h *negativ* ist $(= -h_1)$. Die Grösse λ muss dann kleiner als r_1 sein und nähert sich mit wachsender Zeit asymptotisch dem Werth $\lambda = c$.

In Bezug auf die Werthe der Wurzeln ϱ, die hier in Frage kommen können, bemerken wir, dass

$$M(c) < L(c) = 0,$$

und dass weiter

$$M(-c) = M(c) - 2(K - K')c < M(c).$$

Die Function $M(\mu)$ ist also für $\mu = \pm c$ negativ, und es müssen also entweder *beide* Wurzeln ϱ zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$

gelegen sein, oder beide müssen ausserhalb dieser Grenzen liegen (oder imaginär sein).

Fall IV B α. ϱ_1 und ϱ_2 imaginär, oder reell und dem absoluten Betrag nach grösser als c.

$M(\mu)$ bleibt während der Bewegung immer negativ. Die Grösse μ schwankt also periodisch zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$. Der Planet beschreibt eine Spirale, die sich asymptotisch der Linie $K'K$ nähert. Diese Spirale ist nach aussen von der Ellipse $\lambda = r_1$ begrenzt.

Fall IV B β. Die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 reell und dem absoluten Betrag nach kleiner als c.

Da nun

$$M(\mu) = h_1(\varrho_1 - \mu)(\mu - \varrho_2),$$

so muss, damit $M(\mu)$ negativ werde, μ entweder grösser als ϱ_1 oder kleiner als ϱ_2 sein. Im letzteren Fall schwankt μ periodisch zwischen ϱ_2 und $-c$, im vorigen Falle zwischen ϱ_1 und $+c$. Der Planet beschreibt eine pendelartige Bewegung um K' oder K und nähert sich dabei asymptotisch der Linie $K'K$.

Fall IV C. $r_1 = c_1 > r_2$.

Wie im vorigen Falle bekommt man nun

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = (\lambda - c)\sqrt{2(\lambda + c)h(\lambda - r_2)}.$$

Da hier $\lambda > r_2$ ist, so muss h *positiv* sein. Die halben grossen Achsen λ der Ellipsen können beliebig gross sein und nähern sich mit wachsender Zeit asymptotisch dem Werth $\lambda = c$.

In Bezug auf die Werthe der Wurzeln ϱ, die hier in Frage kommen können, bekommt man wie im vorigen Falle die Ungleichheiten

$$M(-c) < M(c) < L(c) = 0.$$

Da nun $M(\pm\infty)$ positiv ist, so findet man, dass

$$\varrho_1 > c; \quad -c > \varrho_2.$$

Die Function $M(\mu)$ kann also während der Bewegung nicht das Zeichen wechseln, sondern bleibt negativ, und μ schwankt also zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$. Die Bewegung ist der im Falle $IV\,B\,\alpha$ untersuchten ähnlich, nur giebt es hier keine obere Grenze für λ.

Der Fall

$$IV\,D. \quad r_1 = r_2 = c$$

kann nicht vorkommen aus demselben Grunde, wie in Bezug auf den Fall $IV\,A$ bemerkt wurde.

Wir kommen nun zu denjenigen Fällen, in welchen vielfache Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = 0$$

vorkommen. Die Function $S(\mu) = 0$ hat vier Wurzeln, und alle vier können als Grenzpunkte des zulässigen Gebietes auftreten. Wir haben also folgende Fälle zu untersuchen.

K) $\varrho_1 = \varrho_2$,
L) $\varrho_1 = c$,
M) $\varrho_1 = -c$,
N) $\varrho_2 = c$,
O) $\varrho_2 = -c$.

Ausserdem kann es vorkommen, dass drei Wurzeln zusammenfallen:

P) $\varrho_1 = \varrho_2 = c$,
Q) $\varrho_1 = \varrho_2 = -c$.

Fall V K. $\varrho_1 = \varrho_2$.

Man muss hier annehmen, dass die Wurzel ϱ zwischen $+c$ und $-c$ liegt, weil sie sonst keinen Einfluss auf die Bewegung haben kann. Es ist nun

$$S(\mu) = 2(\mu^2 - c^2)\,h\,(\mu - \varrho)^2,$$

woraus folgt, dass entweder h positiv ist und dann $\mu^2 \equiv c^2$ sein muss[1],

[1] Der Fall $\mu = \varrho$ kann dann auch vorkommen und wird später untersucht.

in welchem Falle die Bewegung auf der X-Achse stattfindet, oder h ist *negativ* $(= -h_1)$. Betrachten wir also diesen Fall. Es ist

$$M(\mu) = (K - K')\mu - h_1\mu^2 + \alpha.$$

Da ϱ eine doppelte Wurzel ist, so hat man

$$\begin{aligned}(K - K')\varrho - h_1\varrho^2 + \alpha &= 0,\\ K - K' - 2h_1\varrho \quad &= 0,\end{aligned}$$

also

$$\varrho = \frac{K - K'}{2h_1}. \tag{1}$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung ein, so wird

$$(K - K')^2 + 4h_1\alpha = 0, \tag{2}$$

welche Relation also zwischen den Coefficienten bestehen muss, so dass α negativ ist $(= -\alpha_1)$.

Es ist ferner

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1\lambda^2 - \alpha_1,$$

und die Wurzeln der Gleichung $L(\lambda) = 0$ sind

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{K + K \pm \sqrt{(K + K')^2 - 4\alpha_1 h_1}}{2h_1}.$$

Wird nun unter der Quadratwurzel die Grösse $(K - K')^2 - 4\alpha_1 h_1$, die gleich Null ist, subtrahirt, so bekommt man:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{K + K' \pm 2\sqrt{KK'}}{2h_1} = \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h_1}. \tag{3}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(\sqrt{K} - \sqrt{K'})^2 &= K + K' - 2\sqrt{KK'} =\\ &= K - K' + 2K' - 2\sqrt{KK'} =\\ &= K - K' + 2\sqrt{K'}(\sqrt{K'} - \sqrt{K}) < K - K',\end{aligned}$$

und folglich hat man

(4)
$$r_2 < \frac{K - K'}{2 h_1} < c .$$

Nur eine Wurzel r kann also grösser als c sein. Wir haben also hier zwei Fälle zu betrachten:

Fall V K a. $r_1 < c$.

Es ist hier nothwendigerweise

$$\lambda \equiv c,$$

die Bewegung findet auf der Linie $K' K$ statt, und mit wachsender Zeit nähert sich der Planet unbegrenzt dem Punkte $\mu = \varrho$, wo ϱ aus (1) bestimmt ist, auf dieser Linie, und dies kann von der einen oder der anderen Seite geschehen.

Fall V K b. $r_1 > c$.

Die Bewegung ist von der Ellipse $\lambda = r_1$ begrenzt. *Zwischen dieser Ellipse und der Linie $K' K$ oscillirt der Planet, indem er sich allmählich und bei stetig zunehmendem oder stetig abnehmendem μ der Hyperbel $\mu = \varrho$ asymptotisch nähert.*

Fall V L. $\varrho_1 = c > \varrho_2$.

Der Planet nähert sich asymptotisch der Linie $K' \infty$.

Es ist

(5)
$$(K - K')c + h c^2 + \alpha = 0,$$

und man hat

$$S(\mu) = 2(\mu - c)^2 h (\mu - \varrho_2)(\mu + c).$$

Ist h *negativ*, so muss μ zwischen ϱ_2 und $-c$ oscilliren, und wir kommen auf früher in § 2 behandelte Fälle zurück.[1]

Ist h *positiv*, so folgt, dass man immer $\mu > \varrho_2$ haben muss. Der Planet tangirt einmal die Hyperbel $\mu = \varrho_2$ und nähert sich

[1] Ist $\varrho_2 < -c$, so findet die Bewegung auf der X-Achse statt.

dann asymptotisch der negativen X-Achse (oder einer mit derselben parallelen Linie).

Was nun die Wurzeln r_1 und r_2 betrifft, so lässt sich beweisen, dass sie, für positives h, nicht grösser als c sein können. Es ist in der That nach (5)

$$L(c) = (K + K')c + hc^2 + \alpha > 0,$$

und für alle λ grösser als c hat man

$$L(\lambda) > L(c).$$

Die Function $L(\lambda)$ wechselt also während der Bewegung nicht das Zeichen, bleibt also stets positiv. Die Grösse λ nimmt einmal ihren Minimalwerth $\lambda = c$ an. *Der Planet durchschneidet einmal die Linie $K'K$ und nähert sich dann asymptotisch einer der X-Achse parallelen Linie.*

$$\textit{Fall VM.} \quad \varrho_1 = -c > \varrho_2.$$

Der Planet nähert sich asymptotisch der positiven X-Achse.

Man hat

$$S(\mu) = 2(\mu + c)^2 h(\mu - \varrho_2)(\mu - c).$$

Da $\mu < c$ ist, so muss h negativ sein ($= -h_1$). Es ist somit

$$M(-c) = -(K - K')c - h_1 c^2 + \alpha = 0,$$

so dass α positiv ist.

Weiter ist

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - h_1 \lambda^2 + \alpha,$$

und es ist also $L(c)$ positiv. Da aber $L(\pm \infty)$ negativ ist, so ist offenbar

$$r_1 > c > r_2.$$

Die Bewegung ist von der Ellipse $\lambda = r_1$ begrenzt. Die Grösse λ oscillirt zwischen $\lambda = r_1$ und $\lambda = c$. *Die negative X-Achse* — jen-

seits c — *kann einmal überschritten werden und die Bahncurve nähert sich dann in pendelartigen Schwingungen bei stetig abnehmenden μ-Werthen asymptotisch der positiven X-Achse.*

Fall V N. $\varrho_1 > \varrho_2 = c.$

Man hat nun

$$S(\mu) = 2(\mu - c)^2 h(\mu - \varrho_1)(\mu + c).$$

Hier muss h *negativ* sein $(= -h_1)$. Es ist also

$$M(c) = (K - K')c - h_1 c^2 + \alpha = 0.$$

Hieraus folgt, dass $L(c)$ positiv ist, und da $L(\pm\infty)$ negativ wird, so muss

$$r_1 > c > r_2.$$

Der Fall ist mit dem vorigen VM übereinstimmend, nur nähert sich jetzt der Planet in diesem Fall asymptotisch der *negativen* X-Achse.

Fall V O. $\varrho_1 > \varrho_2 = -c.$

Der Planet nähert sich asymptotisch der *positiven* X-Achse. Sonst ist der Fall mit VL übereinstimmend.

Fall V P. $\varrho_1 = \varrho_2 = c.$

Es ist

$$M(c) = (K - K')c + hc^2 + \alpha = 0,$$

$$M'(c) = K - K' + 2hc = 0,$$

so dass

$$c = -\frac{K-K'}{2h},$$

und hieraus folgt, dass h negativ sein muss $(h = -h_1)$.

Wie im Falle VK findet man nun

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h_1},$$

so dass wie im genannten Falle

$$r_2 < c.$$

Andererseits findet man, dass hier auch immer

$$r_1 > c.$$

Die Bewegung ist von der Ellipse $r_1 = c$ begrenzt, und die Bahncurve wird dieselbe wie im Falle VN.

Endlich ist im Falle VQ

$$\varrho_1 = \varrho_2 = - c.$$

Hier wird

$$- c = - \frac{K - K'}{2h},$$

so dass h positiv ist. Dieselben Ausdrücke für r_1 und r_2 gelten wie im vorigen Falle, so dass

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = - \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h},$$

und beide Wurzeln sind negativ.

Die Function $L(\lambda)$ ändert somit während der Bewegung ihr Zeichen nicht und bleibt positiv, und da

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = 2(\lambda^2 - c^2) L(\lambda),$$

so geht die Grösse λ *einmal* zu ihrem Minimalwerth $\lambda = c$ herunter. *Die Bahncurve durchschneidet einmal die Linie $K'K$, um sich darnach asymptotisch einer der X-Achse parallelen Linie zu nähern.*

Dieser Fall ist VM ähnlich.

Von den merkwürdigen Bahnformen, die in diesem Problem auftreten können, sind die in $IIa\gamma$ und $IIa\delta$ vorkommenden vielleicht die eigenthümlichsten, und sie scheinen sogar sehr unwahrscheinlich. Ich werde sie deswegen etwas ausführlicher untersuchen.

Es ist hier in (IIa)

h positiv,

r_1 und r_2 entweder imaginär oder, wenn sie reell sind, kleiner als c.

Ich werde diejenigen Werthe der Wurzeln ϱ untersuchen, die dann auftreten können.

Man hat

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(K+K') \pm \sqrt{(K+K')^2 - 4\alpha h}}{2h},$$

und

$$\left.\begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(K-K') \pm \sqrt{(K-K')^2 - 4\alpha h}}{2h}.$$

Wir wollen zuerst annehmen, dass r_1 und r_2 imaginär sind. Dann hat man

$$(K+K')^2 < 4\alpha h.$$

Es muss also α positiv sein, und weiter hat man dann auch

$$(K-K')^2 < 4\alpha h.$$

Die Wurzeln ϱ_1 *und* ϱ_2 *sind dann auch imaginär,* und wir befinden uns unter denselben Bedingungen wie im Falle $II\,a\,\alpha$.

Zweitens nehmen wir an, *dass* r_1 *und* r_2 *reell und kleiner als* c *sind.*

Es ist also

$$(K+K')^2 > 4\alpha h$$

und

$$2hr_2 < 2hr_1 = \sqrt{(K+K')^2 - 4\alpha h} - (K+K') < 2ch,$$

oder

$$(K+K'+2ch)^2 > (K+K')^2 - 4\alpha h > 0,$$

oder

$$4ch(K+K') + 4c^2h^2 > -4\alpha h,$$

wo α negativ sein kann. Man kann $4h$ wegdividiren und bekommt dann

$$(K+K')c + hc^2 > -\alpha,$$

was man auch in der Form $L(c) > 0$ schreiben kann.

Die Formen $II\,a\,\gamma$ und $II\,a\,\delta$ setzen voraus, dass ϱ_1 und ϱ_2 reelle Werthe annehmen können, und dass einer von diesen Werthen oder beide dem absoluten Betrag nach kleiner als c sind.

Für die Realität der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 legen die obigen Ungleichheiten kein Hinderniss in den Weg. Wenn *beide* Wurzeln dem absoluten Betrag nach kleiner als c sein sollen, so hat man

$$K - K' + \sqrt{(K - K')^2 - 4\alpha h} < 2ch,$$

oder

$$(K - K')^2 - 4\alpha h < \left(2ch - (K - K')\right)^2,$$

und hieraus bekommt man nach einigen Reductionen

$$-(K - K')c + hc^2 + \alpha > 0,$$

was man auch in der Form $M(-c) > 0$ schreiben kann. Es ist nun offenbar

$$M(-c) = L(c) - 2Kc,$$

und nichts hindert, dass man für $L(c) > 0$ auch $M(-c) > 0$ haben kann. Beide Wurzeln, ϱ_1 und ϱ_2, können also reell und numerisch kleiner als c sein.

Wir betrachten nun die entsprechenden Differentialgleichungen

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)h(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)},$$

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2)h(\mu - \varrho_1)(\mu - \varrho_2)},$$

wo

$$c > r_1 > r_2$$

$$c > \varrho_1 > \varrho_2 > -c.$$

Damit nun die Grössen unter der Quadratwurzel positiv werden, müssen offenbar die Grössen λ und μ folgende Ungleichheiten erfüllen

$$\lambda \geqq c$$

$$\varrho_1 \geqq \mu \geqq \varrho_2.$$

Wir setzen

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\sqrt{2(\lambda + c)h(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)}}{\lambda^2 - \mu^2},$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{\sqrt{2(c^2 - \mu^2)h}}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Die Grössen unter den Wurzelzeichen können niemals Null werden, und die Hilfsgrössen w_1 und w_2 wachsen also stetig mit der Zeit.

Es ist nun

$$\frac{d\lambda}{dw_1} = \sqrt{\lambda - c}$$

$$\frac{d\mu}{dw_2} = \sqrt{(\varrho_1 - \mu)(\mu - \varrho_2)},$$

und hieraus bekommt man durch Integration

$$\lambda = c + \frac{1}{4} w_1^2$$

$$\mu = \varrho_1 \cos^2 \frac{1}{2} w_2 + \varrho_2 \sin^2 \frac{1}{2} w_2 .$$

Der Planet oscillirt zwischen den beiden Hyperbeln ϱ_1 und ϱ_2 und entfernt sich gleichzeitig stetig in's Unendliche.

Der Fall *IIaδ* existirt also. Was den Fall *IIaβ* betrifft, so tritt er in *IIIaβ* wieder auf.

§ 6. Periodische Bewegungen.

Bewegungen, die in der Zeit periodisch sind, können vorkommen in den in § 2 behandelten Fällen, so oft die Bedingung § 1 (10) erfüllt ist. Ausserdem wird die Bewegung periodisch, wenn der Körper sich auf einer Curve

$$\lambda = \text{Const.}$$

bewegt, und unter Umständen auch, wenn die Bahncurve die Gleichung

$$\mu = \text{Const.}$$

hat.

Wir wollen diese Fälle zuerst betrachten.

Fall VI a. $\lambda = Const.$

Da

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda)}, \tag{1}$$

so ist einleuchtend, dass λ entweder gleich c ist, oder mit einer Wurzel der Gleichung

$$L(\lambda) = 0 \tag{2}$$

zusammenfällt. Im ersten Falle bewegt sich der Körper auf der Linie $K'K$ und wir wissen schon, dass hierbei nur drei Fälle vorkommen können, *entweder* dass ein Zusammenstoss mit einer von den attrahirenden Massen stattfindet, *oder* dass der Planet sich asymptotisch einem Punkte auf der Linie $K'K$ nähert (VKa) *oder* dass der Planet sich in's Unendliche entfernt. Diesen Fall können wir also übergehen.

Es erübrigen noch die Fälle, dass λ mit einer Wurzel r_1 oder r_2 zusammenfällt.

Ist $r_1 > c > r_2$, so ist es nicht möglich, dass λ mit r_1 identisch zusammenfällt. Wir wissen nämlich, dass dann für negatives h in λ Libration zwischen r_1 und c eintreten muss ($I\,b$) und für positives h λ in's Unendliche wächst ($II\,b$).

Ist $r_1 > r_2 > c$, so muss h nothwendigerweise negativ sein, weil für positives h *wenigstens eine* Wurzel negativ sein muss. Es ist somit

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)h_1(r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)}\,. \tag{3}$$

Schliessen wir den Fall $\lambda \equiv c$ aus, so entsteht hier immer eine Librationsbewegung zwischen r_1 und r_2, und λ kann nur unter der einzigen Bedingung constant bleiben, dass

$$r_1 = r_2\,.$$

Weil hier eine Doppelwurzel entsteht, so muss

$$(K + K')^2 - 4\alpha h = 0 \tag{4}$$

sein und folglich ist

$$(K - K')^2 - 4\alpha h < 0\,,$$

so dass ϱ_1 und ϱ_2 imaginär werden. Die Grösse μ schwankt demnach zwischen $+c$ und $-c$ und die Bewegung geht auf der Ellipse $\lambda = r$ vor sich, wo nun (nach $IV\,A$)

$$r = \frac{K + K'}{2 h_1} \tag{5}$$

ist.

Eine singuläre Lösung der Differentialgleichung (3) ist immer

$$\lambda = r_1$$

oder $\lambda = r_2$. Man findet aber, dass der *zweite* Differentialquotient von λ in Bezug auf die Zeit dann einen endlichen Werth hat. Wenn aber $\lambda = r$ eine Doppelwurzel bezeichnet, so wird nicht nur der zweite Differentialquotient, sondern auch alle Differentiale höherer Ordnung für $\lambda = r$ identisch verschwinden.

Fall VIb. $\mu = Const.$

Wenn wir auch hier von den Fällen $\mu = \pm c$ absehen, so ist die Differentialgleichung

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - c^2) h (\mu - \varrho_1)(\mu - \varrho_2)}, \tag{6}$$

wenn μ constant sein soll, nur durch die Werthe $\mu = \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ zu befriedigen.

VIb α. Dann hat man für negatives $h (= - h_1)$

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(c^2 - \mu^2) h_1 (\mu - \varrho)^2}.$$

und hier ist $\mu = \varrho$ eine unstabile Lösung.

Weil ϱ eine Doppelwurzel ist, so hat man

$$\varrho = \frac{K - K'}{2 h_1} < c \tag{7}$$

und ausserdem ist

$$(K - K')^2 - 4 \alpha h = 0. \tag{8}$$

Weiter ist

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(K + K') \pm \sqrt{(K + K')^2 - 4 \alpha h}}{2 h}$$

oder nach (8)

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(K + K') \pm 2\sqrt{K K'}}{2 h} = \frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2 h_1}.$$

Es ist also

$$\varrho = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{9}$$

Hieraus folgt, dass r_1 und r_2 nicht *beide* grösser als c sein können. Wohl aber ist es möglich, dass

$$r_1 > c > r_2.$$

Man hat nun

$$L(\lambda) = h_1 (r_1 - \lambda)(\lambda - r_2)$$

und λ oscillirt zwischen r_1 und c.

Der Planet wird in diesem Falle eine pendelartige Bewegung auf der Hyperbel

$$\mu = \frac{K - K'}{2 h_1}$$

ausführen.

Wenn $K = K'$, so wird $\mu = 0$, und der Planet bewegt sich auf der Y-Achse hin und her zu beiden Seiten vom Coordinatenanfangspunkt.

VI b β. Ist h positiv, so bekommt man für *zusammenfallende* ϱ-Werthe

$$\varrho = -\frac{K - K'}{2h}$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{(\sqrt{K} \pm \sqrt{K'})^2}{2h}.$$

Die beiden Wurzeln r sind also hier negativ. Die Function $L(\lambda)$ bleibt während der Bewegung positiv. Die Grösse λ wächst in's Unendliche.

Der Planet bewegt sich in diesem Falle auf der Hyperbel

$$\varrho = -\frac{K - K'}{2h}$$

in's Unendliche.

Periodische Bahnformen können auch auftreten, wenn die Elementarperioden ω_{12} und ω_{22} solche Werthe haben, dass

$$m_1 \omega_{12} + m_2 \omega_{22} = 0,$$

wo m_1 und m_2 ganze Zahlen bezeichnen. Da man ω_{12} und ω_{22} positiv wählen kann, so sind die Zahlen m_1 und m_2 von verschiedenem Zeichen. Wir schreiben also besser

$$(10) \qquad m_1\,\omega_{12} - m_2\,\omega_{22} = 0\,,$$

wo m_1 und m_2 nunmehr *positive* Zahlen bezeichnen. Für die entsprechende Periode erhält man dann den Werth

$$(11) \qquad 2T = 2m_1\,\omega_{11} - 2m_2\,\omega_{21}\,.$$

Nimmt man für die Integrationsconstante h einen bestimmten Werth an — unter den in jedem Fall möglichen Werthen — so wird die Gleichung (10) erfüllt für eine unendliche Reihe (discreter) Werthe der anderen Integrationsconstante α, und umgekehrt. Die periodischen Fälle bilden also eine zweifach unendliche Menge.

Je kleiner die Zahlen m_1 und m_2 werden, desto „einfacher“ wird die entsprechende periodische Bewegung. Am einfachsten wird sich also die Bahncurve gestalten, wenn $m_1 = m_2 = 1$. Im Allgemeinen kann man auch die Integrationsconstanten so wählen, dass dieser Fall eintritt. So beispielsweise in $Ib\gamma$ oder $Ic\alpha$. Wir erhalten dann eine periodische Curve, die sich selbst nicht schneidet. Im Falle $Ib\alpha$ wird aber eine solche Wahl kaum möglich. Es scheint, dass die niedrigsten Werthe für m_1 und m_2 hier $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ sind.

Betrachten wir den Quotienten

$$\nu = \frac{\omega_{12}}{\omega_{22}}\,,$$

den wir kleiner als die Einheit annehmen können — indem sonst ähnliche Schlüsse für $\frac{\omega_{22}}{\omega_{12}}$ gelten — so wird also eine *periodische* Bewegung eintreten, so oft ν eine *rationale* Zahl bezeichnet. Da nun innerhalb einer beliebig kleinen Strecke immer unendlich viele rationale Zahlwerthe vorhanden sind, wie klein diese Strecke auch gewählt wird, so sind die periodischen Bahncurven, unter sämmt-

lichen Bahnformen, die für $0 < \nu < 1$ vorkommen können, überall dicht vertheilt. Man braucht also nur eine *unendlich kleine* Veränderung von ν vorzunehmen, um von einer beliebigen periodischen Bahncurve zu einer — benachbarten — nicht periodischen überzugehen, und umgekehrt.

Eine unendliche Menge von Dingen nennt man nach Cantor *abzählbar*, wenn man die Elemente mit $1, 2, \ldots, n \ldots$ numeriren kann, so dass kein Element ausgelassen wird. Die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 bilden eine abzählbare Menge; man kann sie in der That in der folgenden Ordnung aufschreiben

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{5}{6}\ldots,$$

so dass man nach einander diejenigen Zahlen, deren Nenner 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. ist, aufschreibt, und für jeden Nenner dem Zähler die Werthe 1, 2, 3 u. s. w. zuertheilt, mit Auslassung solcher Werthe, deren Zähler und Nenner relative Primzahlen sind.

Die *periodischen* Bahncurven bilden also eine abzählbare Menge; was dagegen nicht mit den nicht-periodischen der Fall ist. Die Menge der letzteren ist daher nach der Terminologie von Cantor von *höherer Mächtigkeit* als die Menge der periodischen Curven.

Betrachten wir die nicht-periodischen Bahnen, so wissen wir nach § 2 im zweiten Abschnitt, dass man bei ihnen die elliptischen Coordinaten λ und μ — und somit auch die Abstände r und r' des Planeten von den attrahirenden Massen — in Fourier'sche Reihen von der Form

$$\sum_{\substack{i_1\\ i_2}=-\infty}^{+\infty} C_{i_1, i_2} \cos(i_1 u_1 + i_2 u_2) \tag{12}$$

entwickeln kann. Diese Reihen sind *gleichmässig convergent*,[1] und u_1 und u_2 bedeuten lineare Functionen der Zeit und von der Form

[1] Den Beweis hierfür findet man bei Weierstrass a. a. O.

$$(13)\quad \begin{cases} u_1 = n_1 t + \gamma_1, \\ u_2 = n_2 t + \gamma_2, \end{cases}$$

wo

$$(14)\quad \begin{cases} n_1 = \dfrac{\pi\,\omega_{22}}{\Omega}, \\ n_2 = -\dfrac{\pi\,\omega_{12}}{\Omega}. \end{cases}$$

Man kann an diese Reihen einige interessante Betrachtungen knüpfen, welche von grossem Interesse für die Lösung des Problems der drei Körper zu sein scheint. Um zu der Reihe (12) zu gelangen, kann man sich nämlich einer ähnlichen Annäherungsmethode wie der in der „Störungstheorie" gebräuchlichen bedienen. Fassen wir z. B. den „Satelliten" Fall $I b \delta$ in's Auge, in welchem der bewegliche Körper immer in der Nähe der Masse K bleiben muss, und nehmen wir die Masse K' als verhältnissmässig klein an; dann können wir, um zu dem Ausdrucke für die Coordinaten zu gelangen, uns einer *Entwickelung nach den Potenzen der kleinen Masse K'* bedienen. Bei der Bestimmung der successiven Annäherungswerthe der Coefficienten C_{i_1, i_2} würde man dann (wahrscheinlich) mit den durch die sogenannten *kleinen Divisoren* — von welchen weiter im Folgenden gesprochen wird —, welche von der Form $i_1 n_1 + i_2 n_2$ sind, hervorgerufenen Schwierigkeiten zu kämpfen haben, und die Reihen in den verschiedenen Annäherungen würden *nicht* gleichmässig convergent sein, obgleich dies mit den wahren Reihen (12) der Fall ist. Man könnte sogar im Voraus sagen, *warum* solche Schwierigkeiten hier auftreten müssen. Die Erklärung scheint nämlich darin zu liegen, dass, wie in § 3 im zweiten Abschnitt bewiesen wurde, der Abstand r von dem Körper K in diesem Fall *keine von Null verschiedene untere Grenze besitzt. Es existirt deswegen auch kein mittlerer Werth für diesen Abstand* in dem Sinne, wie man diesen Begriff in der Störungstheorie benutzt.

Es scheint mir in der That möglich, dass man in ähnlichen Umständen die Erklärung der merkwürdigen Convergenz-Verhältnisse der Reihen in der Störungstheorie zu suchen hat.

§ 7. Zusammenstellung der verschiedenen Bahnformen, die bei der Attraction eines Körpers nach zwei festen Centren auftreten können.

1) *Geradlinige Bewegung:* Der Planet bewegt sich auf der Linie $K'K$ oder deren Verlängerung.

Der Planet bewegt sich in der Anfangsrichtung, bis er mit einer der Massen zusammenstösst. $I a \alpha$, $I a \beta$, $II a \alpha$ u. A.;

oder der Planet bewegt sich in der Anfangsrichtung, bis er einen bestimmten Punkt erreicht; kehrt dann um und stösst nach einiger Zeit mit einer Masse zusammen. $I a \gamma$, $I a \delta$ u. A.;

oder entfernt sich auf der X-Achse in's Unendliche. $II a \alpha$;

oder nähert sich unbegrenzt einem zwischen K' und K gelegenen Punkt, ohne denselben in endlicher Zeit zu erreichen. $V K a$.

2) *Lemniscatenbewegung:* Die Bahncurve erfüllt, wenn die Bewegung nicht etwa periodisch ist, den ganzen innerhalb einer Ellipse eingeschlossenen Raum überall dicht. $I b \alpha$, $I b \beta$. Fig. 2.

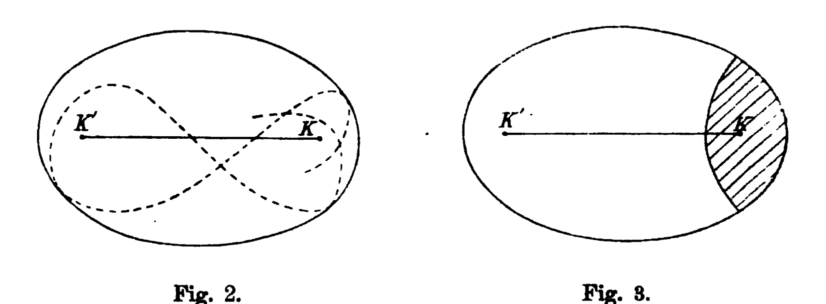


Fig. 2. Fig. 3.

3) *Satellitenbewegung:* Der Planet bewegt sich innerhalb eines abgeschlossenen Raumes, in welchem sich die *eine* Masse K oder K' befindet. Die Begrenzung dieses Raumes bilden Theile einer Ellipse und einer Hyperbel. Die Bahncurve ist entweder periodisch oder erfüllt den betreffenden Raum überall dicht. $I b \gamma$, $I b \delta$. Fig. 3.

4) *Planetenbewegung:* Der Planet bewegt sich (wie ein äusserer Planet) in einem von zwei confocalen Ellipsen eingeschlossenen

Raum. Die Bahncurve ist entweder periodisch, in welchem Falle sie beide Ellipsen berührt, oder sie erfüllt den betreffenden Raum überall dicht. $I c \alpha$, $I c \beta$. Fig. 4.

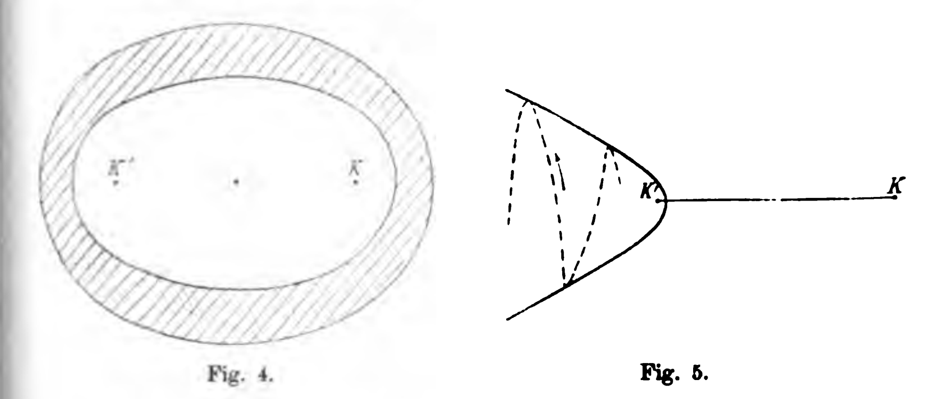


Fig. 4. Fig. 5.

5) *Divergirende Pendelbewegung:* Der Planet entfernt sich in's Unendliche von den beiden Centren, indem er in immer grösseren pendelartigen Schwingungen zwischen beiden Zweigen einer Hyperbel

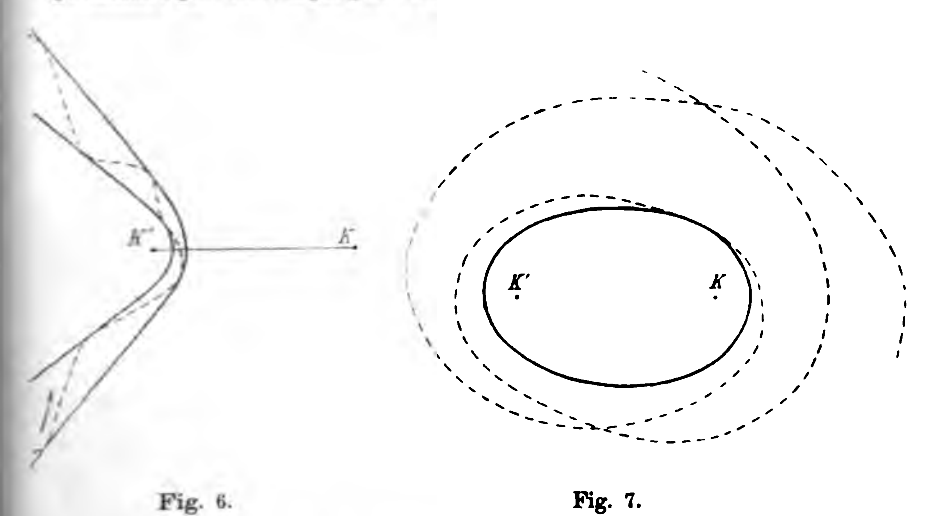


Fig. 6. Fig. 7.

nach beiden Seiten der X-Achse hin und her schwankt. $II a \gamma$, $III a \beta$. Fig. 5.

6) *Hyperbolische Sinussoidbewegung:* Der Planet entfernt sich

in's Unendliche, indem er zwischen zwei confocalen Hyperbeln periodisch hin und her schwankt. $II\,a\,\delta$. Fig. 6.

7) *Divergirende Spiralbewegung:* Der Planet entfernt sich in's Unendliche, indem er immer grössere Windungen um die Linie $K'K$ ausführt. $II\,a\,\beta$, $II\,b\,\alpha$, $III\,a\,\alpha$, $III\,b\,\alpha$. Fig. 7.

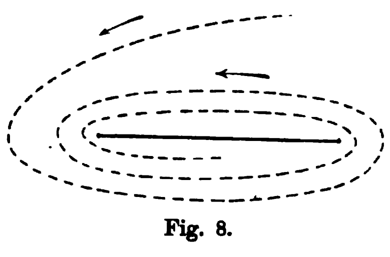


Fig. 8.

8) *Convergirende Spiralbewegung:* Der Planet nähert sich asymptotisch in immer kleiner werdenden Windungen der Linie $K'K$, ohne sie in endlicher Zeit zu erreichen. $IV\,B\,\alpha$, $IV\,C$. Fig. 8.

9) *Convergirende Pendelbewegung:* Der Planet nähert sich asymptotisch in pendelartigen Schwingungen auf beiden Seiten der X-Achse, entweder einer *Hyperbel* ($V\,K\,b$) oder der X-Achse, ohne

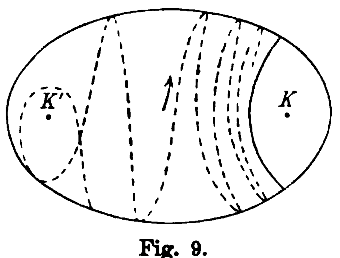


Fig. 9.

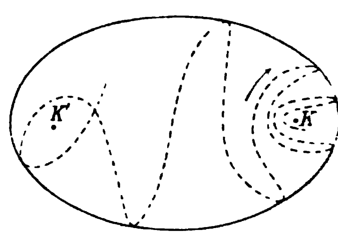


Fig. 10.

diese Grenze in endlicher Zeit zu erreichen. $V\,K\,b$, $IV\,B\,\beta$, $V\,M$, $V\,N$, $V\,P$. Figg. 9 und 10.

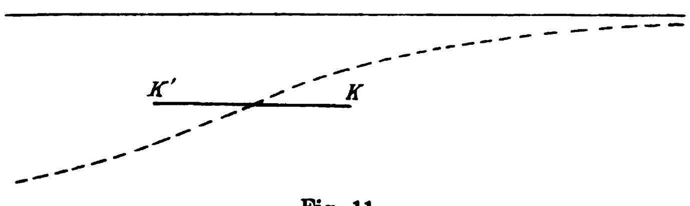


Fig. 11.

10) *Asymptotisch- geradlinige Bewegung:* Der Planet nähert sich asymptotisch einer der X-Achse parallelen Linie. $V\,L$, $V\,O$. Fig. 11.

11) *Elliptische Bewegung:* Der Planet bewegt sich in einer bestimmten Richtung auf einer Ellipse, deren Gleichung

$$\lambda = \frac{K + K'}{2 h_1}$$

ist. *VI a.*

12) *Hyperbolische Bewegung:* Der Planet bewegt sich auf einer Hyperbel

entweder so, dass er sich auf der Hyperbel in's Unendliche entfernt. Der Focus dieser Hyperbel liegt dann in der *grösseren* Masse (K). *VI b β*;

oder so, dass er auf der Hyperbel um die X-Achse pendelartig hin und her schwankt. Der Focus dieser Hyperbel liegt dann in der *kleineren* Masse (K'). *VI b α.* Fig. 12.

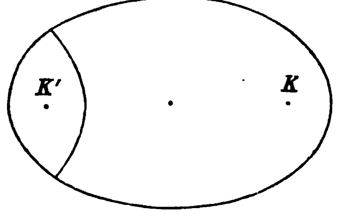


Fig. 12.

Alle hier betrachteten Bewegungsformen mit Ausnahme von VI b α sind stabil, und man kann nicht bei einer unendlich kleinen Aenderung der Integrationsconstanten (h und α) von einer Form zu einer anderen übergehen.

Die oben von mir eingeführten Namen für die verschiedenen Bewegungsformen geben zwar nicht immer einen adäquaten Ausdruck für die entsprechenden Bahncurven. Sie scheinen mir indessen auch nicht allzu unklar zu sein. Für die genauere Beschreibung verweise ich auf die vorigen Paragraphen.

In seiner classischen Arbeit über die elliptischen Integrale hat Legendre dem Problem der Attraction nach zwei festen Centren eine ausführliche Untersuchung gewidmet.[1] Er hat sich dabei auf den Fall, dass h *negativ* ist, beschränkt, in welchem wie wir gesehen haben, die Bahncurven im Endlichen liegen. Von den hier möglichen Bewegungen hat er Nr. 1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12 behandelt. In Bezug

[1] „Traité des Fonctions elliptiques." T. I.

auf die convergirende Pendelbewegung Nr. 9 hat er aber nur den Fall behandelt, dass der Planet sich der X-Achse asymptotisch nähert (Fig. 10). Den allgemeinen Fall (Fig. 9), dass der Planet sich asymptotisch einer *Hyperbel* nähert, scheint er übersehen zu haben. Es ist bemerkenswerth, dass LEGENDRE die wichtige Eigenschaft der nicht-periodischen Bahnen, den zulässigen Bereich überall dicht zu erfüllen, nicht unbekannt war. Wenigstens erwähnt er dies ausdrücklich in Bezug auf die Planetenbewegung Nr. 4.

Die geradlinige Bewegung wird von LEGENDRE unter der Voraussetzung behandelt, dass der Planet die Massen K und K' *passiren* kann. Ich habe es für rathsamer gehalten, die Bewegung mit dem Zusammenstoss endigen zu lassen, weil der physikalische Sinn der Bewegung und die Gültigkeit der Differentialgleichungen hier aufhören zu gelten.

LEGENDRE stützt sich bei der Behandlung dieses Problems auf seine tiefgehenden Untersuchungen über die elliptischen Integrale. Die Behandlung wird aber hierdurch unnöthigerweise weitläufig und schwierig.

Die Discussion der Bewegung geschieht dagegen, wie wir gesehen haben, oben fast ohne Rechenarbeit und ohne weitläufige Formeln. Es würde keinen Vortheil bringen, wenn man statt der *Integrale* von LEGENDRE die elliptischen *Functionen* einführen wollte. Für die Discussion der Bewegungsformen ist dies überflüssig und für die Berechnung der Werthe der Coordinaten zu einer beliebigen Zeit ist es nur ein grosser Umweg, da man hierdurch nicht die Coordinaten durch die Zeit, *sondern die Zeit durch die Coordinaten* ausgedrückt erhält. Durch die Formel (12) werden aber die Coordinaten direct als Functionen der Zeit gegeben und die Coefficienten in den Reihen können immer und auch verhältnismässig leicht berechnet werden.

§ 8. Beispiele.

Obgleich in der Natur keine Beispiele bekannt sind, in denen die Bewegung eines Körpers durch die Attraction zweier festen

Centra bestimmt ist, so kommen doch, wenn es sich um drei Körper handelt, die sich nach dem NEWTON'schen Gesetz gegenseitig anziehen, verschiedene Fälle vor, in denen es berechtigt scheint, anzunehmen, dass das Problem von der Anziehung zweier *festen* Centra annäherungsweise zu einer Auffassung der Bahncurve führen kann.

Ein solcher Fall wäre z. B. vorhanden, wenn man die Bewegung eines kleinen Körpers untersuchen wollte, der mit grosser Geschwindigkeit durch ein Doppelsternsystem hindurchgeht.

Auch in unserem Planetensystem fehlt es nicht an Beispielen, in denen es möglich wäre, in dieser Weise zu einer Annäherung an die wahre Bahn zu gelangen. Betrachtet man z. B. das System, das aus der Sonne, einem Planeten und einem zu demselben gehörenden Satelliten besteht, so wird, wenn der Satellit hinreichend nahe dem Planeten liegt, die Winkelgeschwindigkeit des Planeten um die Sonne als sehr klein betrachtet werden können, und man würde also wenigstens für eine kürzere Zeit die Sonne als stillstehend betrachten können, und den Satelliten als von zwei *festen* Centren angezogen. Handelt es sich um die Bewegung eines kleinen Planeten unter der Anziehung der Sonne und eines grossen Planeten — Jupiter oder Saturn —, so lassen sich auch, wie in einem der folgenden Abschnitte gezeigt wird, die Coordinaten des Planeten nach Potenzen der Winkelgeschwindigkeit des grossen Planeten entwickeln und man wird somit zu einer Annäherungsmethode geführt, in welcher das Problem von der Anziehung zweier *festen* Centra die erste Annäherung geben würde. Zwar ist die Convergenz dieser Annäherungen nicht untersucht worden; nichts desto weniger mag es doch von Interesse sein, die Bahnen, die man so in der ersten Annäherung bekommen würde, einer Prüfung zu unterziehen.

Gesetzt, dass ein Körper auf der Verbindungslinie $K'K$ zwischen der Sonne (K) und einem Planeten (K') sich befindet, und dass derselbe beim Anfang der Bewegung mit einer zu dieser Linie senkrechten Geschwindigkeit fortgeschleudert wurde, wobei K' und K als stillstehend betrachtet werden; es soll seine Bewegung untersucht werden unter der Voraussetzung, dass der Körper von K' und K nach dem NEWTON'schen Gesetz angezogen wird.

Wir haben also zunächst die Integrationsconstanten h und α zu bestimmen und dann daraus die Wurzeln r_1, r_2, ϱ_1, ϱ_2 zu berechnen.

Nach Formel (6) und (5*) § 1 hat man folgende Formeln zur Berechnung von h und α:

$$(1)\qquad h = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left[\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2}\right] - \frac{(K + K')\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{(K - K')\mu}{\lambda^2 - \mu^2},$$

$$(2)\qquad \alpha = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2 \lambda'^2}{2(\lambda^2 - c^2)} - (K + K')\lambda - h\lambda^2,$$

oder

$$(2^*)\; -\alpha = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2 \mu'^2}{2(c^2 - \mu^2)} + (K - K')\mu + h\mu^2.$$

Wir haben hierin die Werthe λ_0, μ_0, λ_0' und μ_0' für den Anfang der Bewegung einzusetzen, um die Werthe von h und α zu erhalten.

Die Einheit der Längen wählen wir so, dass $c = 1$. Der Abstand $K'K$ ist dann gleich 2. Liegt der Körper beim Anfang der Bewegung in dem Abstande a von K', so ist somit

$$(3)\qquad \lambda_0 = 1; \quad \mu_0 = 1 - a.$$

Um die Werthe der Differentialquotienten λ_0' und μ_0' zu erhalten, bedienen wir uns der Gleichungen I § 7 und erhalten dann, weil nach den gemachten Voraussetzungen

$$x_0' = 0,$$

die folgenden Gleichungen:

$$0 = \mu_0\, d\lambda_0 + \lambda_0\, d\mu_0$$

$$dy_0 = \sqrt{c^2 - \mu_0^2}\,\lambda_0 \frac{d\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - c^2}} - \sqrt{\lambda_0^2 - c^2}\,\mu_0 \frac{d\mu_0}{\sqrt{c^2 - \mu_0^2}},$$

oder nach den erhaltenen Werthen für λ_0 und μ_0

$$0 = (1 - a)\lambda_0' + \mu_0'$$

$$y_0' = \sqrt{1-(1-a)^2}\,\frac{\lambda_0'}{\sqrt{\lambda_0^2 - 1}}.$$

Es wird also

(4) $$\lambda_0' = \mu_0' = 0,$$

und

(4*) $$\frac{\lambda_0'}{\sqrt{\lambda_0^2 - 1}} = \frac{y_0'}{\sqrt{1-(1-a)^2}}.$$

Setzt man die Werthe (3), (4) und (4*) in (1) und (2) ein, so wird nun

(5) $$h = \frac{1}{2}y_0'^2 - \frac{K}{2-a} - \frac{K'}{a},$$

(5*) $$-\alpha = (K - K')(1-a) + h(1-a)^2.$$

Wenn die Werthe der Massen K und K', des Abstandes a und der Anfangsgeschwindigkeit y_0' gegeben sind, so sind also die Werthe von h und α hierdurch bestimmt.

Ich werde nun in Bezug auf a zwei verschiedene Annahmen machen, die eine dem Fall entsprechend, dass es sich um einen Planeten handelt, der sich zwischen der Sonne und dem störenden Planeten bewegt, die andere einem Satellitenfall entsprechend.

Zuerst bemerke ich indessen, dass die Gleichung (5*) in folgender Form geschrieben werden kann:

$$M(1-a) = 0,$$

wo $M(\mu)$ dieselbe Bedeutung wie in den vorigen Paragraphen hat. Die eine von den Wurzeln (ϱ_1, ϱ_2) ist also gleich $1 - a$, d. h. gleich demjenigen Werth, den μ beim Anfang der Bewegung hat. *Die eine Begrenzung des zulässigen Bereiches für die Bahncurve geht somit durch denjenigen Punkt, in dem die Bahncurve* (beim Anfang der Bewegung) *die Linie $K'K$ senkrecht schneidet.*

Um ein einfaches planetoidähnliches Beispiel zu erhalten, setzen wir

$$a = 1.$$[1]

[1] Dies würde etwa einem kleinen Planeten entsprechen, der sich im mittleren Abstande der Asteroiden befindet und der vom Jupiter „gestört“ wird.

Es wird nun nach (5*)

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ h = \frac{1}{2} y_0'^2 - K - K'. \end{cases}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit y_0' bestimmen wir in der Weise, dass der Planetoid, wenn die Anziehung des Planeten K' aufhörte, sich in einem Kreise um die Sonne (K) bewegen würde. Wie man im folgenden Paragraphen findet, wird dann

$$(7)\qquad y_0'^2 = \frac{K}{r} = K,$$

so dass

$$(8)\qquad h = -\frac{K}{2} - K'.$$

Um nun die Grenzcurve des zulässigen Bereiches zu finden, hat man, nach dem vorigen Paragraphen, die Wurzeln der Gleichungen

$$L(\mu) = 0$$

und

$$M(\mu) = 0$$

zu berechnen. Da $\alpha = 0$ ist, so ist einfach

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda + h\lambda^2,$$
$$M(\mu) = (K - K')\mu + h\mu^2$$

oder

$$L(\lambda) = (K + K')\lambda - \left(\frac{1}{2}K + K'\right)\lambda^2,$$

$$M(\mu) = (K - K')\mu - \left(\frac{1}{2}K + K'\right)\mu^2.$$

Es ist also

$$r_2 = \frac{2(K + K')}{K + 2K'}$$

$$r_1 = 0$$

$$\varrho_1 = \frac{2(K - K')}{K + 2K'}$$

$$\varrho_2 = 0.$$

Man hat somit nach den Bezeichnungen der vorigen Paragraphen

$$r_1 > c > r_2$$

$$\varrho_1 > c > \varrho_2 > -c,$$

und wir befinden uns in dem Falle $Ib\gamma$ in § 2.

Wir finden nun für λ und μ folgende Grenzen

$$\frac{2(K+K')}{K+2K'} \geqq \lambda \geqq 1$$

$$0 \geqq \mu \geqq -1.$$

Fig. 13.

Die Bewegung ist eine Librationsbewegung. Für $\mu = 0$ erhält man die Y-Achse AOB. Die Ellipse

$$\lambda = \frac{2(K+K')}{K+2K'}$$

hat angenähert die halbe grosse Achse gleich 2, weil die Masse K' klein ist. Die Bewegung geht innerhalb des Gebietes ABC vor sich, das von der Bahncurve überall dicht erfüllt wird. Es ist bemerkenswerth, dass für jeden Werth von K' die eine Begrenzung des zulässigen Gebietes immer von der Y-Achse gebildet wird.

Gehen wir nun zum zweiten Fall über, dass nämlich der kleine Körper sehr nahe am Planeten K' senkrecht zur Linie $K'K$ fortgeschleudert wird. Nehmen wir nun an, dass der Körper eine solche Anfangsgeschwindigkeit besitzt, dass er, wenn die Anziehung der Sonne vernachlässigt werden könnte, sich in einem Kreis um K' bewegen würde, so hat man

$$y_0'^2 = \frac{K'}{a},$$

also

$$h = -\frac{K}{2-a} - \frac{K'}{2a}, \tag{9}$$

wo nun a eine kleine Quantität bezeichnet.

Bewegt sich der Körper um K oder um K'? Um dies zu entscheiden, müssen wir die Wurzeln r_1, r_2, ϱ_1, ϱ_2 berechnen. Es ist nun

$$M(\mu) = (K - K')\mu + h\mu^2 + \alpha$$

$$M(1 - a) = (K - K')(1 - a) + h(1 - a)^2 + \alpha = 0,$$

so dass, wenn $M(1 - a)$ von $M(\mu)$ subtrahirt wird,

$$M(\mu) = \big(K - K' + h(\mu + 1 - a)\big)\big(\mu - (1 - a)\big).$$

Für die eine Hyperbel, welche das Gebiet begrenzt, innerhalb dessen der Körper sich bewegen kann, ist die halbe grosse Achse gleich $1 - a$. Ist nun die andere Hyperbel näher an K gelegen, so muss sich der Körper um K' bewegen, sonst um K. Die Bedingung dafür, dass der Körper ein Satellit um K' wird, ist also

$$-\frac{K - K' + h(1 - a)}{h} < 1 - a,$$

oder, wenn man den Werth von h einsetzt,

$$\frac{K'}{a^2} > \frac{K}{2 - a}. \tag{10}$$

Für den *Erdmond* ist

$$K = 320\,000\,K'$$

$$200\,a = 1,$$

und man findet somit, dass hier

$$\frac{K'}{a^2} < \frac{K}{2 - a}$$

ist, und folglich wird ein Körper, der unter den gesagten Bedingungen im Abstande des Mondes sich befände, sich um die *Sonne* und nicht um die Erde bewegen, wenn beide stillstehend betrachtet werden. Dies gilt auch, wenn man statt der siderischen Winkelgeschwindigkeit des Mondes sich der *synodischen* bedient.

Es kommt dies beim ersten Anblick etwas befremdend vor. Man hätte vielleicht erwartet, dass doch der Körper sich um die Erde bewegen würde. Bei näherem Nachdenken findet man jedoch, dass das Resultat nicht anders sein kann, *da man nämlich hier die Attraction der Sonne auf die Erde versäumt hat.* Die *directe* Anziehung der Sonne auf den Mond ist in der That fast doppelt so gross wie die directe Anziehung der Erde auf denselben Körper. Die Ungleichheit (10) mag einfach so ausgesprochen werden, dass der Körper sich um die Sonne bewegt, wenn der doppelte Werth der Anziehung der Sonne grösser als die Anziehung des Planeten ist.

Man würde also für unseren Erdmond die Attraction von zwei festen Centren nicht als eine erste Annäherung benutzen können.

Würde man statt dessen z. B. den inneren Marsmond *Phobos* wählen, so würde man finden, dass die Anziehung des *Mars* auf Phobos 200 mal grösser als die Anziehung der Sonne auf diesen Satelliten ist. Für den *Neptunstrabanten* ist die Anziehung des Hauptplaneten mehr als das 8000 fache der directen Anziehung der Sonne. In diesen Fällen könnte man also in der ersten Annäherung die Sonne als stillstehend betrachten.



VIERTER ABSCHNITT

DAS PROBLEM DER ZWEI KÖRPER



§ I. Allgemeine Betrachtungen.

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in die eine Masse (m_1) gelegt, und bezeichnen wir mit x, y, z die Coordinaten der anderen Masse (m_2) in diesem Coordinatensystem, so ist

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0, \end{aligned} \right.$$

wo

$$\mu = k^2 (m_1 + m_2),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und k^2 die Einheitskraft bezeichnet.

Aus diesen Differentialgleichungen erhält man unmittelbar die folgenden Integrale, nämlich:

$$(2) \qquad \left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d t}\right) = \frac{2\mu}{r} + 2 h_1,$$

das man das *Integral der lebendigen Kraft nennt,* und

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} y \frac{d z}{d t} - z \frac{d y}{d t} &= c_1, \\ z \frac{d x}{d t} - x \frac{d z}{d t} &= c_2, \\ x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t} &= c_3, \end{aligned} \right.$$

welche die *Flächenintegrale* genannt werden.

Werden diese Integrale mit x, y, z bez. multiplizirt und die Resultate addirt, so erhält man

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \tag{4}$$

die Gleichung einer Ebene. Aus dieser Gleichung folgt somit, dass die Bewegung in einer festen Ebene vor sich geht.

Bezeichnen wir mit α, β und γ die Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Coordinatenachsen bilden, so kann man die Gleichung der Ebene auch in der Form

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

schreiben, und es ist also

$$\frac{c_1}{\cos\alpha} = \frac{c_2}{\cos\beta} = \frac{c_3}{\cos\gamma} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Ist i die Neigung der Bahnebene gegen die XY-Ebene, Ω der Winkel, den der aufsteigende Knoten der Bahnebene auf der XY-Ebene mit der X-Achse bildet, so findet man unmittelbar, dass

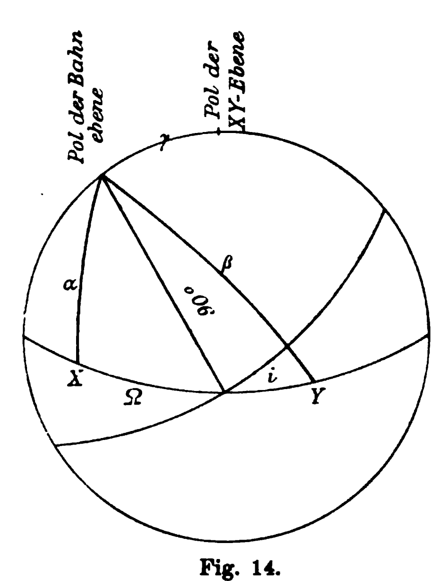


Fig. 14.

$$\cos\alpha = \sin i \sin\Omega,$$
$$\cos\beta = -\sin i \cos\Omega,$$
$$\cos\gamma = \cos i,$$

also

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= c \sin i \sin\Omega, \\ c_2 &= -c \sin i \cos\Omega, \\ c_3 &= c \cos i, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wo gesetzt ist

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Werden die Coordinatenachsen gedreht, so ändern sich i und Ω, also auch c_1, c_2 und c_3, wogegen c unverändert bleibt.

Die Form der Bahncurve wird von den Werthen der Integrationsconstanten c und h bestimmt. Man erhält in der That folgende vier Formen:

1) $c = 0$, geradlinige Bewegung,
2) h_1 negativ, elliptische Bewegung,
3) h_1 gleich Null, parabolische Bewegung,
4) h_1 positiv, hyperbolische Bewegung,

welche Fälle wir nach einander untersuchen wollen. Wir werden dabei die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung zum Ausgangspunkt der Integration wählen, weil man hierdurch zu näherem Anschluss an das Problem der *drei* Körper kommt.

§ 2. Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung für das Zwei-Körperproblem.

In I § 9 wurde schon gezeigt, dass die Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung für die Polarcoordinaten im Zwei-Körperproblem die folgende ist:

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 .$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichung durch Separation der Variabeln integrirt werden kann. Man kann hier das Theorem von Stäckel zur Anwendung bringen. In der That, wenn man setzt

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varphi_{11} = \;\;1, & \varphi_{21} = \;\;0, & \varphi_{31} = 0, \\ \varphi_{12} = -\frac{1}{r^2}, & \varphi_{22} = \;\;1, & \varphi_{32} = 0, \\ \varphi_{13} = \;\;0, & \varphi_{23} = -\frac{1}{\cos^2\varphi}, & \varphi_{33} = 1, \end{array}\right.$$

so hat man

$$\Delta = |\varphi_{ij}| = 1 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

und es ist

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} = 1, \quad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{31}} = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi} .$$

Die Coefficienten der partiellen Differentialquotienten der linken Seite von (1) sind also von derjenigen Form, die für die Anwendung des Theorems von STÄCKEL erforderlich ist, und man hat weiter

$$\psi_1 = \frac{\mu}{r}, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0. \tag{3}$$

Wir können also unmittelbar nach den Formeln II (19) das Problem auf Quadratur zurückführen. Die entsprechenden Gleichungen werden

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}}, \tag{4}$$

$$0 = -\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}} + \frac{d\varphi}{\sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2\varphi}}}, \tag{4*}$$

$$0 = -\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2\varphi}}} + \frac{d\theta}{\sqrt{2\alpha_3}}, \tag{4**}$$

wo $h_1 = \alpha_1$. Die intermediären Integrale werden erhalten, indem man diese Gleichungen nach dr, $d\varphi$ und $d\theta$ auflöst und man bekommt dann:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{2\alpha_2}{r^2}}, \\ r^2\frac{d\varphi}{dt} &= \sqrt{2\alpha_2 - \frac{2\alpha_3}{\cos^2\varphi}}, \\ r^2\cos^2\varphi\frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{2\alpha_3}\,dt. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Man kann bei der Discussion der Bewegung entweder von (4) oder (5) ausgehen, je nachdem man die in § 3 oder § 2 des zweiten Abschnittes enthaltenen Sätze benutzen will. Aus (4) ist ersichtlich, dass wir hier vor einem Beispiel bedingt periodischer Bewegungen stehen, und ich werde in einem anderen Paragraphen die Sätze, die hieraus für das Zwei-Körperproblem folgen, ableiten.

Aus der letzten Gleichung (5) folgt, dass α_3 *positiv* sein muss, weil sonst $d\theta$ imaginär wird, und aus der zweiten Gleichung geht dann hervor, dass auch α_2 *positiv* sein muss. Wir setzen also

$$(6) \qquad \begin{cases} 2\alpha_2 = h_2^2, \\ 2\alpha_3 = h_3^2, \end{cases}$$

wo h_2 und h_3 reelle Grössen bezeichnen, welche auch gleich Null sein können.

Führen wir nun diese Grössen in (4) ein und integriren, so erhalten wir nach der Integration folgende Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} H_1 + t = \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\ H_2 = h_2 \displaystyle\int \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} - h_2 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\ H_3 = \theta - h_3 \displaystyle\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}, \end{cases}$$

wo nun H_1, H_2, H_3 drei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Die Constante α_1 fällt nach II § 1 mit der Constante h_1 der lebendigen Kraft zusammen.

Die Gleichungen (7) enthalten die vollständigen Integrale mit der erforderlichen Zahl von 6 Integrationsconstanten.

Bevor wir nun mit Hilfe dieser Gleichungen die Coordinaten r, φ und θ als Functionen der Zeit ausdrücken, wollen wir die Form der Bahncurve für verschiedene Werthe der Integrationsconstanten discutiren. Da wir schon im vorigen Paragraphen gefunden haben, dass die Bahn in einer Ebene liegt, so genügt es, um die Form der Bahn kennen zu lernen, den Abstand (r) zwischen den beiden Körpern als Function von der Zeit zu finden. Dies geschieht aber mit Hilfe der *ersten* Gleichung (7), die wir also nun untersuchen wollen.

Aus der zweiten Gleichung (5) geht hervor, dass man für

$\alpha_2 = 0$ auch $\alpha_3 = 0$ haben muss, und man erhält somit für $\alpha_2 = 0$ das Resultat, dass sowohl φ wie θ constant sein müssen, so dass der Körper sich auf einer geraden Linie, dem Radius Vector, bewegt. Der vom Radius Vector in der Zeiteinheit überstrichene Flächenraum ist dann offenbar gleich Null, und wir sehen also, dass der Fall $h_2 = 0$ (oder $\alpha_2 = 0$) und $c = 0$ einander entsprechen.

§ 3. Geradlinige Bewegung. $c = 0$.

Nach § 2 des zweiten Abschnitts wissen wir, dass die Aenderungen der durch die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2} = \psi(r)$$

bestimmten „mechanischen" Grösse r von den Werthen der Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad \psi = 0$$

bedingt sind. Diese Wurzeln können nicht imaginär sein. Wenn dies nämlich der Fall wäre, so könnte $\psi(r)$ für reelle Werthe von r nicht das Zeichen wechseln. Nun ist aber für hinreichend kleine Werthe von r $\psi(r)$ nothwendig negativ, also müsste, wenn die Wurzeln imaginär wären, $\psi(r)$ negativ sein, was unmöglich ist. Die Wurzeln können also nicht imaginär sein.

Für $c = 0$ (also auch $h_2 = 0$) kann die Gleichung $\psi = 0$ nicht mehr als *eine* Wurzel haben. Diesen Fall wollen wir nun untersuchen; wir wissen schon, dass die Bewegung dann auf dem Radius Vector vor sich geht. Es ist

$$(2) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 .$$

Ist nun erstens h_1 *positiv*, so verschwindet die rechte Seite für keinen reellen (positiven) Werth von r. Hieraus folgt, dass in diesem Falle r immer wächst oder immer abnimmt. Die beiden

Körper entfernen sich entweder von einander in's Unendliche oder stossen zuletzt mit einander zusammen.

Ist zweitens h_1 *negativ*, so setzen wir

$$h_1 = -f, \tag{3}$$

so dass

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu - 2fr}{r}.$$

Nach der in II § 2 entwickelten Methode führen wir eine Hilfsveränderliche w durch die Gleichung

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2f}{\beta}\left(\frac{\mu}{f} - r\right) \tag{4}$$

ein, so dass nun

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r}, \tag{5}$$

wo β eine noch unbestimmte positive Constante bezeichnet.

Aus (5) folgt, dass w mit t immer wächst. Die Gleichung (4) giebt

$$r = \frac{\mu}{f} - \frac{fw^2}{2\beta}. \tag{6}$$

Setzt man also

$$\frac{\mu}{f} = \frac{f}{2\beta}.$$

oder

$$\beta = \frac{f^2}{2\mu}, \tag{7}$$

so wird

$$r = \frac{\mu}{f}(1 - w^2). \tag{8}$$

Dieser Werth, in (5) eingesetzt, giebt

$$\sqrt{1 - w^2}\, dw = \frac{f^{3/2}}{\mu\sqrt{2}}\, dt, \tag{9}$$

und man bekommt also nach der Integration

$$w\sqrt{1 - w^2} + \arcsin w = \frac{\sqrt{2}\, f^{3/2}}{\mu}(t - t_0). \tag{10}$$

Die Gleichungen (8) und (10) enthalten die Lösung des Problems. Für $t < t_0$ ist w negativ und wächst dann, bis man für $t = t_0$ den Werth $w = 0$ erhält. Der Abstand r hat dann seinen Maximalwerth $\left(= \frac{\mu}{f}\right)$. Nachher fängt r an abzunehmen, bis zuletzt nach einer endlichen Zeit die beiden Körper zusammenstossen. Dies geschieht zu der Zeit

$$t - t_0 = \frac{\mu}{2\sqrt{2}\, f^{3/2}}\pi. \tag{11}$$

Zur Berechnung des Werthes von r zu einer beliebigen Zeit muss die Gleichung (10) nach w aufgelöst werden. Da diese Gleichung transcendenter Natur ist, so ist diese Berechnung nur durch Reihenentwickelungen oder andere Annäherungsmethoden ausführbar. Wenn der Abstand zwischen den Körpern klein ist, so kann man sich einer Entwickelung nach gebrochenen Potenzen der Zeit bedienen, die ich jetzt ableiten will.

Aus (1) folgt durch Differentiation

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = -\frac{\mu}{r^2}. \tag{12}$$

Stossen die Körper zur Zeit $t = 0$ zusammen, so wollen wir eine Reihenentwickelung von r in der Umgebung von $t = 0$ suchen.

Statt r führen wir eine neue Veränderliche ϱ ein durch die Gleichung

$$r = \sqrt[3]{\mu}\,\varrho, \tag{13}$$

und erhalten dann

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} = -\frac{1}{\varrho^2}. \tag{14}$$

Setzen wir nun

$$\varrho = \gamma t^m, \tag{15}$$

so erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{dt} = m\gamma t^{m-1},$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = m(m-1)\gamma t^{m-2}.$$

Der Werth (15) für ϱ befriedigt offenbar die Differentialgleichung (14), wenn m und γ so gewählt werden, dass

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} 2 - m = 2m, \\ m(m-1)\gamma^3 = -1, \end{cases}$$

welche Gleichungen geben

$$\text{(16*)} \qquad \begin{cases} m = \dfrac{2}{3}, \\ \gamma = \sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}. \end{cases}$$

Es ist also

$$\text{(17)} \qquad \varrho = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\, t^{2/3} = \tau$$

ein particulares Integral von (14). Dasselbe enthält indessen keine Integrationsconstante. Wir suchen nun ein allgemeineres Integral, indem wir für ϱ die Form

$$\text{(18)} \qquad \varrho = \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \dots$$

annehmen.

Hieraus bekommt man

$$\frac{d\varrho}{dt} = (1 + 2\alpha_2 \tau + 3\alpha_3 \tau^2 + \dots)\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = (2\alpha_2 + 6\alpha_3 \tau + \dots)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

$$+ (1 + 2\alpha_2 \tau + 3\alpha_3 \tau^2 + \dots)\frac{d^2\tau}{dt^2}.$$

Es ist aber nach (17)

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{2}{\tau},$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2},$$

so dass wir erhalten

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\alpha_2}{\tau} + 9\alpha_3 + 20\alpha_4 \tau + \dots$$

Weiter ist nach (18)

$$\varrho^2 = \tau^2 + 2\alpha_2\tau^3 + (\alpha_2^2 + 2\alpha_3)\tau^4 + \ldots,$$

und hieraus

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\tau^2} - \frac{2\alpha_2}{\tau} + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_3 - (4\alpha_2^3 - 6\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_4)\tau + \ldots$$

Wir erhalten somit aus (14) die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} -1 &= -1, \\ 2\alpha_2 &= \quad 2\alpha_2, \\ 9\alpha_3 &= -3\alpha_2^2 + 2\alpha_3, \\ 20\alpha_4 &= \quad 4\alpha_2^3 - 6\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \text{ willkürlich}, \\ &\alpha_3 = -\frac{3}{7}\alpha_2^2, \\ &\alpha_4 = \quad \frac{23}{63}\alpha_2^3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Für den Radius Vector erhalten wir nun endlich nach (13)

$$r = \sqrt[3]{\mu}\left[\tau + \alpha_2\tau^2 - \frac{3}{7}\alpha_2^2\tau^3 + \frac{23}{63}\alpha_2^3\tau^4 - \ldots\right]. \tag{19}$$

Wenn wir von der Gleichung (2) ausgegangen wären, statt von (12), so wäre die Constante h_1 in der Reihe für r vorgekommen. Es muss also eine Relation zwischen h_1 und α_2 bestehen. Um diese zu bestimmen, setzen wir (18) in (2) ein und bekommen dann

$$h_1 = 5\mu^{2/3}\alpha_2. \tag{20}$$

Die Entwickelung von r, wenn ein Zusammenstoss stattfindet, ist, soviel ich weiss, zuerst von BURRAU gegeben A. N. Bd. 136. Dieselbe ist bei gewissen Untersuchungen über periodische Bahnen von Nutzen.

§ 4. Elliptische Bewegung. h_1 negativ.

Ist in der Gleichung

$$r^2 \psi(r) = 2\mu r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0 \tag{1}$$

h_2 von Null verschieden und h_1 negativ $(= -f)$, so müssen beide Wurzeln reell und positiv sein. Wir haben nämlich bewiesen, dass sie nicht imaginär sein können, und da $\psi(0)$ und $\psi(\infty)$ beide negativ sind, so müssen beide Wurzeln positiv sein. Nennen wir die Wurzeln r_1 und r_2 $(r_1 > r_2)$, so ist also

$$r^2 \psi(r) = 2f(r_1 - r)(r - r_2). \tag{2}$$

Hieraus folgt, dass die Ungleichheit

$$r_2 \leqq r \leqq r_1 \tag{3}$$

immer erfüllt sein muss.

Nach den in II § 2 entwickelten Principien führen wir nun eine Hilfsgrösse w durch die Formel

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2f}{\beta}(r_1 - r)(r - r_2)$$

ein. Wir wählen hier β so, dass

$$\beta = 2f, \tag{4}$$

und haben also die Gleichungen

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = (r_1 - r)(r - r_2), \tag{5}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2} = \frac{2f}{r^2}. \tag{6}$$

Die Grösse w wächst stetig mit t, und r schwankt periodisch zwischen den Grenzen r_1 und r_2. Aus (5) folgt

$$r = r_1 \sin^2 \frac{1}{2} w + r_2 \cos^2 \frac{1}{2} w. \tag{7}$$

Bekanntlich ist die Bahncurve eine Ellipse. Um dies zu beweisen, müssten wir auch die Gleichung für φ und θ in Betracht nehmen. Da wir schon bewiesen haben, dass die Bahncurve eine *ebene* Curve ist, so können wir für einen Augenblick die XY-Ebene so wählen, dass dieselbe mit der Bahnebene zusammenfällt. Man hat dann $\varphi = 0$, und man braucht nur die letzte Gleichung § 2 (5), welche nun lautet

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h_2. \tag{8}$$

Andererseits ist

$$r \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}, \tag{9}$$

und durch Division erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$\frac{h_2 \, dr}{r\sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}} = d\theta. \tag{10}$$

Das Integral dieser Gleichung kann durch geeignete Bestimmung der Constanten p und e in der Form

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \pi)}, \tag{11}$$

geschrieben werden, wo π eine Integrationsconstante bezeichnet; es ist dies die Polargleichung einer Ellipse.

Die Grösse r hat einen Maximalwerth gleich r_1 und einen Minimalwerth gleich r_2. Setzen wir nun, um die gewöhnlichen Bezeichnungen einzuführen,

$$r_1 = a(1 + e), \qquad r_2 = a(1 - e), \tag{12}$$

so erhalten wir aus (7)

$$r = a(1 - e\cos w). \tag{13}$$

Die Hilfsgrösse w wird in der Astronomie die *excentrische Anomalie* genannt.

Aus (6) erhalten wir weiter

$$r\,dw = \sqrt{2f}\,dt,$$

und also nach der Integration, indem wir den Ausdruck (13) einsetzen,

$$w - e\sin w = \frac{\sqrt{2f}}{a}(t - t_\pi), \tag{14}$$

eine Gleichung, die gewöhnlich die KEPLER'sche *Gleichung* genannt wird. Aus (14) erhalten wir w als Function von t, aus (13) wird der entsprechende Werth von r berechnet.

Die Grössen a und e lassen sich leicht durch die Integrationsconstanten h_1 und g ausdrücken.

Man hat nämlich nach (1)

$$r_1 + r_2 = \frac{\mu}{f},$$

$$r_1 r_2 = \frac{h_2^2}{2f}.$$

Nach (12) folgt hieraus

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{\mu}{2f}, \\ a^2(1 - e^2) &= \frac{h_2^2}{2f}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} h_2 &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \\ f &= \frac{\mu}{2a}, \end{aligned}\right. \tag{15*}$$

durch welche Formeln h_2 und f durch die „elliptischen Elemente" ausgedrückt werden.

Die Länge einer Periode wird nach II § 2 (16*)

$$2T = 2\int_{r_2}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mu r - 2fr^2 - h_2^2}} = 2\int_0^\pi \frac{r\,dw}{\sqrt{2f}}, \tag{16*}$$

oder, wenn der Werth (13) für r eingeführt wird,

$$(16) \qquad 2T = \frac{2\pi a}{\sqrt{2f}}.$$

Der Quotient $2\pi : 2T$ wird *die mittlere Bewegung* — n — des Planeten genannt, und ihr Ausdruck ist somit

$$(17) \qquad n = \frac{\sqrt{2f}}{a} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}},$$

so dass die Formel (14) lautet

$$(18) \qquad w - e \sin w = n(t - t_\pi).$$

Wir werden nun auch die Constanten h_3, H_1, H_2, H_3 § 2 (7) durch die gewöhnlichen elliptischen Elemente ausdrücken. Es ist nach § 2 (5)

$$(19) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2 \varphi}},$$

wo φ den Winkel bezeichnet, den der Radius vector mit der XY-Ebene bildet. Die Maximal- und Minimalwerthe von φ sind also durch die Formel

$$\cos \varphi = \pm \frac{h_3}{h_2}$$

bestimmt, und da φ höchstens gleich der Neigung i der Bahnebene gegen die XY-Ebene sein kann, so ist somit

$$(20) \qquad h_3 = h_2 \cos i = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i.$$

Zur Bestimmung von H_1, H_2 und H_3 in § 2 (7) müssen wir bestimmte Werthe für die eine Integrationsgrenze der Integrale annehmen. Wir können sie beliebig wählen und setzen

$$(21^*) \qquad H_1 + t = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}},$$

$$(21^{**})\qquad H_2 = h_2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} - h_2 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}},$$

$$(21^{***})\qquad H_3 = \theta - h_3 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}.$$

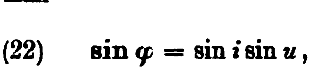
Wenn $r = r_1$ ist, so befindet sich der Planet im *Perihelium.* Aus (21*) erhalten wir somit

$$-H_1 = t_\pi = \textit{Zeit für den Durchgang des Planeten durch das Perihelium.}$$

Setzt man auch in (21**) $r = r_1$, so verschwindet das letzte Integral, und man erhält

$$H_2 = h_2 \int_0^{\varphi_\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} = \int_0^{\varphi_\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}},$$

wo φ_π die Breite des Planeten bei seinem Durchgang durch das Perihelium bezeichnet. Setzt man



$$(22)\qquad \sin\varphi = \sin i \sin u,$$

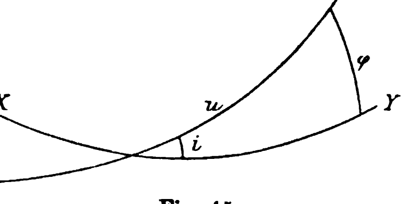


Fig. 15.

so ist die geometrische Bedeutung des Winkels u durch nebenstehende Figur ersichtlich. Man hat nun

$$du = -\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}},$$

und es ist somit

$$H_2 = u_\pi = \textit{Winkelabstand des Periheliums vom aufsteigenden Knoten der Bahnebene auf der XY-Ebene.}$$

Setzt man endlich in (21***) $\varphi = 0$, so erhält man

$$H_3 = \theta_0 = \textit{Länge des aufsteigenden Knotens.}$$

Bezeichnen wir also mit Ω die Länge des aufsteigenden Knotens des Planeten, mit π die Perihellänge, welche in der gewöhnlichen Weise gerechnet wird, also von der X-Achse zum Knoten und dann in der Bahnebene vom Knoten bis zum Perihelium, so erhalten wir somit folgende Zusammenstellung der Werthe der Integrationsconstanten durch die gewöhnlichen elliptischen Elemente ausgedrückt

$$(23)\quad \begin{cases} h_1 = -\frac{\mu}{2a}, & h_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & h_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, \\ H_1 = -t_\pi, & H_2 = \pi - \Omega, & H_3 = \Omega. \end{cases}$$

Die Constanten h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3 werden die *canonischen Elemente* des Planeten genannt.

Die Ausdrücke der Coordinaten als Functionen der Zeit werden in einem folgenden Paragraphen gegeben werden.

Obgleich die Coordinaten r, φ und θ nur mit Hilfe von Reihenentwickelungen sich durch die Zeit ausdrücken lassen, so kann man sie als geschlossene trigonometrische Functionen der Hilfsveränderlichen w — der excentrischen Anomalie — ausdrücken. Wir haben nämlich nach § 2 (5)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_2 \sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}},$$

oder

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{h_2\, dt}{r^2} = \frac{h_2}{\sqrt{2f}} \frac{dw}{r},$$

oder

$$(24)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{\sqrt{1-e^2}\, dw}{1 - e\cos w},$$

und wenn die Integrationen ausgeführt werden:

$$(25)\qquad \arcsin \frac{\sin\varphi}{\sin i} = 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{1}{2} w\right] + H_2,$$

wo die Constante H_3 mit der in (21**) eingeführten ebenso bezeichneten Integrationsconstante identisch sein muss.

Hieraus erhält man

$$\frac{\sin\varphi}{\sin i} = \sin 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w\right]\cos H_3 +$$

$$+ \cos 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w\right]\sin H_3 .$$

Nun ist aber

$$\sin 2 \operatorname{arctg} x = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\cos 2 \operatorname{arctg} x = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

und es wird also, nach einigen Reductionen,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin i} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin w}{1-e\cos w}\cos H_3 + \frac{\cos w - e}{1-e\cos w}\sin H_3 . \tag{26}$$

Wir bemerken, dass aus diesem Ausdruck folgt

$$r\sin\varphi = a\sin i\left[\sqrt{1-e^2}\sin w\cos H_3 + (\cos w - e)\sin H_3\right]. \tag{27}$$

Die Grösse $r\sin\varphi$ bedeutet die *Z*-Coordinate des Planeten, welche also durch die obige einfache Formel durch w ausgedrückt wird.

Nun ist endlich nach (21***)

$$\theta - H_3 = \cos i\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-\frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}},$$

oder, wenn die Hilfsgrösse u eingeführt wird,

$$\theta - H_3 = \int_0^u \frac{\cos i\, d u}{1-\sin^2 i\sin^2 u},$$

oder

$$\theta - H_3 = \operatorname{arctg}\left[\cos i \operatorname{tg} u\right]. \tag{28}$$

Führt man hier wieder φ ein, so erhält man endlich

$$(29)\qquad \operatorname{tg}(\theta - H_3) = \frac{\cos i \sin\varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\varphi}},$$

wo wir nun den Ausdruck (27) für $\sin\varphi$ einzuführen haben.

Aus (29) werden noch die folgenden Formeln abgeleitet

$$(29^*)\qquad \begin{cases} \sin(\theta - H_3) = \operatorname{cotg} i \operatorname{tg}\varphi, \\ \cos(\theta - H_3) = \dfrac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\varphi}}{\sin i \cos\varphi}. \end{cases}$$

Aus (25) folgt, dass

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 i}} = \cos\left\{2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{1}{2} w\right] + H_2\right\}$$

oder

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 i}} = \cos 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{1}{2} w\right] \cos H_2 -$$
$$- \sin 2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{1}{2} w\right] \sin H_2,$$

und also

$$(30)\qquad \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 i}} = \frac{\cos w - e}{1 - e\cos w} \cos H_2 - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin w}{1 - e\cos w} \sin H_2.$$

Mittelst dieses Ausdruckes und (27) erhalten wir (wenn $H_3 = \Omega$, $H_2 = \pi - \Omega$ gesetzt werden)

$$(31)\qquad \begin{cases} r\cos\varphi\cos(\theta - \Omega) = a\,[(\cos w - e)\cos(\pi - \Omega) - \\ \qquad - \sqrt{1-e^2}\sin w \sin(\pi - \Omega)], \\ r\cos\varphi\sin(\theta - \Omega) = a\cos i\,[\sqrt{1-e^2}\sin w\cos(\pi - \Omega) + \\ \qquad + (\cos w - e)\sin(\pi - \Omega)], \\ r\sin\varphi = a\sin i\,[\sqrt{1-e^2}\sin w\cos(\pi - \Omega) + \\ \qquad + (\cos w - e)\sin(\pi - \Omega)]. \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Ausdrücke sind die rechtwinkligen Coordinaten (ξ, η, ζ) des Planeten auf ein Coordinatensystem

bezogen, dessen X-Achse durch den Knoten geht, dessen Y-Achse in der alten XY-Ebene liegt und dessen Z-Achse mit der alten Z-Achse zusammenfällt. Diese Coordinaten sind also lineare Functionen von $\cos w$ und $\sin w$. Die Coordinaten, auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, werden dann auch lineare Functionen derselben Grössen.

§ 5. Parabolische Bewegung. h_1 gleich Null.

Ist $h_1 = 0$, so ist

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu r - h_2^2}{r^2}, \tag{1}$$

und setzen wir nun

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{1}{\beta}(2\mu r - h_2^2), \tag{2}$$

so wird

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2}. \tag{3}$$

Aus (2) folgt, dass r einen Minimalwerth $r = \frac{h_2^2}{2\mu}$ hat, von welchem aus r in's Unendliche wächst. Nennen wir den Perihelabstand des Planeten q, so ist also

$$q = \frac{h_2^2}{2\mu}, \tag{4}$$

und man hat

$$\frac{dr}{\sqrt{r-q}} = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}}\, dw$$

$$2\sqrt{r-q} = \sqrt{\frac{2\mu}{\beta}}\, w.$$

Bestimmen wir ferner β in der Weise, dass

$$\frac{\mu}{2\beta} = q,$$

womit also

$$\beta = \frac{\mu}{2q} = \frac{\mu^2}{h_2^2}, \tag{5}$$

so bekommt man

$$r = q(1 + w^2). \tag{6}$$

Die Relation zwischen w und t wird nach (3)

$$r\,dw = \sqrt{\beta}\,dt,$$

oder wenn man den Werth von r nach (6) einführt und integrirt,

$$w + \frac{1}{3}w^3 = \frac{\sqrt{\beta}}{q}(t - t_0)$$

oder

$$w + \frac{1}{3}w^3 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}(t - t_0), \tag{7}$$

wo t_0 die Zeit für den Durchgang des Planeten durch das Perihelium bezeichnet.

Durch (6) und (7) ist der Radiusvector als Function der Zeit gegeben.

Die Coordinaten r, φ, θ lassen sich als geschlossene Functionen der Hilfsgrösse w ausdrücken.

Führt man nämlich in den Formeln

$$H_2 = h_2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \dfrac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} - h_2 \int_q^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{h_2^2}{r^2}}} \tag{8}$$

$$H_3 = \theta - h_3 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{h_2^2 - \dfrac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} \tag{8*}$$

statt φ die Hilfsgrösse u und statt r die Grösse w ein, wo

$$\sin\varphi = \sin i \sin u,$$

so erhält man aus (8)

$$u = H_2 + 2\,\mathrm{arctg}\,w, \tag{9}$$

und hieraus bekommt man nach einiger Rechnung

$$\frac{\sin\varphi}{\sin i} = \frac{2w}{1 + w^2}\cos H_2 + \frac{1 - w^2}{1 + w^2}\sin H_2. \tag{10}$$

Es ist auch

$$\cos u = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}}$$

und demnach

$$(11) \qquad \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}} = \frac{1 - w^2}{1 + w^2} \cos H_2 - \frac{2w}{1 + w^2} \sin H_2 .$$

Für die Länge θ des Planeten bekommt man nach (8*) den Werth

$$\theta = H_3 + \int_0^u \frac{\cos i \, du}{1 - \sin^2 i \sin^2 u}$$

oder

$$\theta = H_3 + \operatorname{arctg} (\cos i \operatorname{tg} u)$$

oder

$$\operatorname{tg} (\theta - H_3) = \cos i \operatorname{tg} u .$$

Hieraus folgt nun weiter, dass

$$(12) \begin{cases} \cos (\theta - H_3) = \dfrac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 i}}}{\cos \varphi} \\ \sin (\theta - H_3) = \dfrac{\cos i \sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 u}} = \dfrac{\cos i \dfrac{\sin \varphi}{\sin i}}{\cos \varphi} . \end{cases}$$

Nach Einsetzen der Werthe (10) und (11) erhalten wir somit, wenn wir Ω und $\pi - \Omega$ statt H_3 und H_2 einführen

$$(13) \begin{cases} r \cos \varphi \cos (\theta - \Omega) = q \left[(1 - w^2) \cos (\pi - \Omega) - 2 w \sin (\pi - \Omega)\right] \\ r \cos \varphi \sin (\theta - \Omega) = q \cos i \left[2 w \cos (\pi - \Omega) + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)\right] \\ r \sin \varphi \qquad\qquad\quad = q \sin i \left[2 w \cos (\pi - \Omega) + (1 - w^2) \sin (\pi - \Omega)\right]. \end{cases}$$

Werden also die Coordinaten auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen X-Achse durch den aufsteigenden Knoten der Bahnebene geht, so werden die Coordinaten durch (13) als rationale Functionen zweiten Grades in w ausgedrückt. Die Coordinaten, auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, werden also auch rationale Functionen zweiten Grades in w.

Wenn man die XY-Ebene in die Bahnebene legt, so wird θ die *Länge in der Bahn* (v). Man kann den Ausdruck für dieselbe aus (13) erhalten, indem man annimmt, dass $\pi = \Omega$ ist. Man erhält dann

$$(14^*) \qquad \begin{cases} r\cos(v-\pi) = q(1-w^2) \\ r\sin(v-\pi) = 2qw, \end{cases}$$

und hieraus durch Division

$$\operatorname{tg}(v-\pi) = \frac{2w}{1-w^2},$$

so dass

$$(14) \qquad w = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(v-\pi).$$

Die sämmtlichen Formeln zur Berechnung der Lage in einer parabolischen Bahn sind also die folgenden:

$$w + \frac{1}{3}w^3 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}(t-t_0)$$

$$r = q(1+w^2)$$

$$w = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(v-\pi)$$

$$r\cos\varphi\cos(\theta-\Omega) = q[(1-w^2)\cos(\pi-\Omega) - 2w\sin(\pi-\Omega)]$$

$$r\cos\varphi\sin(\theta-\Omega) = q\cos i[2w\cos(\pi-\Omega) + (1-w^2)\sin(\pi-\Omega)]$$

$$r\sin\varphi \qquad = q\sin i[2w\cos(\pi-\Omega) + (1-w^2)\sin(\pi-\Omega)].$$

Will man die Coordinaten als Functionen der Zeit darstellen, so muss man Reihenentwickelungen anwenden. In der Umgebung der Durchgangszeit des Planeten durch das Perihel lassen sich die Coordinaten als Potenzreihen nach den Potenzen der Zeit ausdrücken, die für eine ziemlich lange, doch nicht unbeschränkte Zeit convergiren.

§ 6. Hyperbolische Bewegung. h_1 positiv.

Ist h_1 positiv, so muss von den beiden Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad r^2\psi(r) = 2\mu r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0$$

nothwendigerweise die eine positiv, die andere negativ sein. Setzt man also

$$r^2 \psi(r) = 2 h_1 (r - r_1)(r + r_2),$$

so hat man

$$(2) \qquad \begin{cases} r_2 - r_1 = \dfrac{\mu}{h_1} \\[2ex] r_2 r_1 = \dfrac{h_2^{\,2}}{2 h_1}. \end{cases}$$

Der Abstand r zwischen den beiden Körpern hat demnach ein Minimum gleich r_1 und wächst, nachdem dies erreicht ist, ins Unendliche.

Um die Gleichung

$$(3) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2 h_1 (r - r_1)(r + r_2)}{r^2}$$

zu integriren, haben wir also nach den in II § 2 entwickelten Principien eine Hilfsgrösse w einzuführen, welche so bestimmt ist, dass

$$(4) \qquad \left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2 h_1 (r - r_1)}{\beta},$$

und dann wird

$$(4^*) \qquad \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta (r + r_2)}{r^2}.$$

Aus (4) folgt

$$(5) \qquad r - r_1 = \frac{h_1}{2\beta} w^2.$$

Zur Bestimmung der Relation zwischen r und der Zeit hat man nun diesen Werth in (4*) einzuführen, und erhält

$$(6) \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{\beta \left(r_1 + \dfrac{h_1}{2\beta} w^2 + r_2\right)}}{r_1 + \dfrac{h_1}{2\beta} w^2}.$$

Die Constante β ist noch unbestimmt. Wir wählen sie nun so, dass

$$(7) \qquad \frac{h_1}{2\beta} = r_1 + r_2,$$

und erhalten dann statt (6)

$$\frac{(r_1 + r_2)(1 + w^2) - r_2}{\sqrt{\beta(r_1 + r_2)(1 + w^2)}}\, dw = dt,$$

oder

$$\text{(8)} \qquad \sqrt{\frac{r_1 + r_2}{\beta}}\sqrt{1 + w^2}\, dw - \frac{r_2}{\sqrt{\beta(r_1 + r_2)}}\frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}} = dt.$$

Nun ist

$$2\int\sqrt{1 + w^2}\, dw = w\sqrt{1 + w^2} + \log(w + \sqrt{1 + w^2});$$

$$\int\frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}} = \log(w + \sqrt{1 + w^2}).$$

Nach der Integration erhält man also aus (8)

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1 + r_2}{\beta}}\, w\sqrt{1 + w^2} - \frac{r_2 - r_1}{2\sqrt{\beta(r_1 + r_2)}}\log(w + \sqrt{1 + w^2}) = t - t_0.$$

Setzt man also

$$\varkappa = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\beta(r_1 + r_2)}}{r_2 - r_1},$$

so lautet die obige Gleichung

$$\text{(9*)} \qquad \varkappa w\sqrt{1 + w^2} - \log(w + \sqrt{1 + w^2}) = \lambda(t - t_0)$$

oder

$$\text{(9)} \qquad \frac{\varepsilon^{\varkappa w\sqrt{1 + w^2}}}{w + \sqrt{1 + w^2}} = \varepsilon^{\lambda(t - t_0)},$$

mittelst welcher Formel w aus t zu berechnen ist. Ich habe hier die Basis der natürlichen Logarithmen mit ε bezeichnet.

Mit Hilfe der Relationen (2) erhalten wir folgende Werthe für $\varkappa$ und λ, durch die Integrationsconstanten h_1 und h_2 ausgedrückt

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{2 h_1 h_2^2 + \mu^2}, \\ \lambda = \dfrac{1}{\mu} h_1 \sqrt{2 h_1}. \end{cases}$$

Wie später gezeigt wird, ist die Bahn in diesem Falle eine Hyperbel. Will man die Constanten durch die Elemente dieser Hyperbel ausdrücken, so hat man

$$(11)\qquad \begin{cases} r_1 = a(e-1), \\ r_2 = a(e+1), \end{cases}$$

wo a die halbe grosse Achse und e die Excentricität der Hyperbel bezeichnet. Es wird dann nach (2) und (7)

$$(11^*)\qquad \begin{cases} h_1 = \frac{\mu}{2a} \\ h_2 = \sqrt{\mu a (e^2 - 1)}. \\ \beta = \frac{\mu}{8a^2 e} \end{cases}$$

Für $\varkappa$ und λ erhalten wir die Werthe

$$(11^{**})\qquad \begin{cases} \varkappa = e \\ \lambda = \frac{\sqrt{\mu}}{2a^{3/2}}, \end{cases}$$

so dass also die Formeln für die Berechnung des Radius vector in einer hyperpolischen Bahn lauten:

$$(12)\qquad \begin{cases} r = a(e-1) + 2aew^2 \\ \frac{\varepsilon^{ew\sqrt{1+w^2}}}{w + \sqrt{1+w^2}} = \varepsilon^{\frac{\sqrt{\mu}}{2a^{3/2}}(t-t_0)}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind indessen für die numerische Berechnung solcher Bahnen, deren Excentricität nahe der Einheit ist, nicht geeignet. Es wird nämlich dann a unendlich gross und also nach (11*) β verschwindend klein, so dass die Substitution der Hilfsgrösse w illusorisch wird. Es empfiehlt sich deswegen, für solche Bahnen einen anderen Berechnungsweg einzuschlagen.

Wie schon im zweiten Abschnitt hervorgehoben wurde, hat es bisweilen seine Vortheile, bei der Einführung der Hilfsgrösse w

auch andere Wurzeln, als diejenigen, die für die Bewegung charakteristisch sind, zu berücksichtigen. Man kann also bei der Integration von (3) in folgender Weise vorgehen.

Man setzt

$$\left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = \frac{2h}{\beta}(r - r_1)(r + r_2), \tag{13}$$

und erhält dann

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{\beta}{r^2}. \tag{13*}$$

Es ist offenbar, dass auch die in solcher Weise definirte Grösse w die Eigenschaft besitzt, mit der Zeit stetig zu wachsen. Setzt man nun

$$\beta = 2h, \tag{14}$$

so lautet das Integral von (13)

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{coshp} w, \tag{15}$$

wo die Bezeichnung

$$\operatorname{coshp} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} \tag{16}$$

eingeführt worden ist.

Da nach (13*) nun

$$r\,dw = \sqrt{\beta}\,dt,$$

so erhält man also nach Einführung des Werthes von r und unter Anwendung der Bezeichnung

$$\operatorname{sinhp} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \tag{16*}$$

folgende Relation zwischen w und der Zeit

$$\frac{r_1 - r_2}{2} w + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{sinhp} w = \sqrt{\beta}(t - t_0). \tag{17}$$

Führen wir nun die Grössen a und e vermittelst der Relationen (11) in (15) und (17) ein, so erhalten wir somit

$$\left\{\begin{aligned} r &= a(e \operatorname{coshp} w - 1) \\ \frac{\sqrt{\beta}}{a}(t - t_0) &= e \operatorname{sinhp} w - w. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Nach (11*) und (14) ist hier

$$\frac{\sqrt{\beta}}{a} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \tag{18*}$$

Bezeichnet man mit v die *Länge in der Bahn*, so ist nach § 2 (5)

$$r^2 \frac{dv}{dt} = h_2. \tag{19}$$

Da weiter

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{2 h_1 (r - r_1)(r + r_2)},$$

so besteht also zwischen den Differentialen von r und v die Relation

$$dv = \frac{h_2\, dr}{r\sqrt{2 h_1 (r - r_1)(r + r_2)}}, \tag{20}$$

und man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichung durch den Werth

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos(v - \pi) + 1} \tag{20*}$$

befriedigt wird, welches die Polargleichung derjenigen Hyperbel ist, deren halbe grosse Achse gleich a und deren Excentricität gleich e ist. Für r_1, r_2, h_1, h_2 haben wir die Werthe (11) und (11*) einzusetzen.

Wir können nun in ähnlicher Weise wie bei der Ellipse und der Parabel die rechtwinkligen Coordinaten als geschlossene Functionen der Hülfsgrösse w darstellen. Ich beschränke mich darauf, die Länge in der Bahn als Function von w auszudrücken.

Führt man in (19) die Ausdrücke (13*) für dt und (18) für r ein, so erhält man

$$dv = \frac{h_2}{\sqrt{\beta}\, a} \frac{dw}{e \cosh p - 1} = \frac{\sqrt{e^2 - 1)}\, dw}{e \cosh p\, w - 1}. \tag{21}$$

Das Integral dieser Gleichung lautet

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(v - \pi) = \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{tg} h p\, \frac{w}{2}. \tag{22}$$

Für hyperbolische Bahnen, deren Excentricität nahe der Einheit ist, muss man sich anderer Formeln bedienen.

§ 7. Die Kraft repulsiv. Kometenschweife.

Ist die Kraft repulsiv, so muss μ negativ sein $(= -\mu_1)$. Betrachten wir nun die Gleichung

$$(1) \qquad r^2 \psi(r) = -2\mu_1 r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0,$$

so erhellt hieraus unmittelbar, dass h_1 *nun positiv sein muss*, weil sonst die Bewegung nicht möglich ist. Von den Wurzeln zu (1) muss dann nothwendigerweise die eine positiv, die andere negativ sein, und wir setzen

$$(2) \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2h_1(r - r_1)(r + r_2)}{r^2}.$$

Man hat nun

$$(3) \qquad \begin{cases} r_1 - r_2 = \dfrac{\mu_1}{h_1} \\ r_1 r_2 = \dfrac{h_2^2}{2h_1}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass hier $r_1 > r_2$. Bei der im vorigen Paragraphen vorkommenden ähnlichen Gleichung war dagegen die kritische Wurzeln numerisch *kleiner* als die andere. Wir können bei der Integration von (2) uns nach Belieben der ersten oder der zweiten Methode im vorigen Paragraphen bedienen. Wir setzen nun

$$(4) \qquad \left(\frac{dr}{dw}\right)^2 = (r - r_1)(r + r_2),$$

und es ist dann

$$(4^*) \qquad \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{2h_1}{r^2}.$$

Aus (4) folgt

$$(5) \qquad r = \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{r_1 + r_2}{2} \operatorname{coshp} w.$$

Setzt man diesen Werth in (4*) ein, so bekommt man

$$(5^*) \qquad \frac{r - r_2}{2} w + \frac{r + r_2}{2} \operatorname{sinhp} w = \sqrt{2h_1}(t - t_0).$$

Es ist weiter

$$r^2\,dv = h_2\,dt, \tag{6*}$$

und also

$$dv = \frac{h_2}{\sqrt{2h_1}}\,\frac{dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r+r_2)}}. \tag{6}$$

Führen wir nun die Grössen a und e, durch folgende Gleichungen definirt, ein

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= a(e+1),\\ r_2 &= a(e-1),\end{aligned}\right. \tag{7}$$

so wird nach (3)

$$\left\{\begin{aligned} h_1 &= \frac{\mu_1}{2a},\\ h_2 &= \sqrt{\mu_1\,a(e^2-1)}.\end{aligned}\right. \tag{7*}$$

Wenn die Relationen (7) und (7*) berücksichtigt werden, so findet man, dass das Integral von (6) folgendes ist:

$$r = \frac{a(e^2-1)}{e\cos(v-\pi)-1}. \tag{8}$$

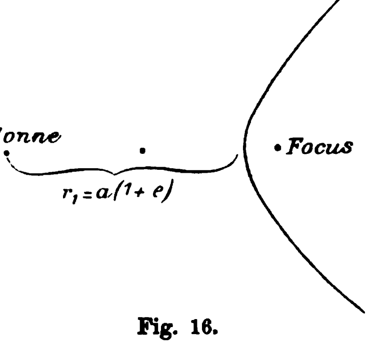


Fig. 16.

Dies ist aber die Polargleichung desjenigen Zweiges einer Hyperbel, dessen Focus nicht in dem Punkte $r = 0$ liegt. Ist die Kraft repulsiv, so ist also die relative Bahn der beiden Körper eine Hyperbel, deren *zweiter* Focus in dem anderen Körper („der Sonne“) liegt.

Für die *Länge in der Bahn* v erhält man nach (6*) die Differentialgleichung

$$dv = \frac{\sqrt{e^2-1}\,dw}{1+e\,\mathrm{coshp}\,w}, \tag{9*}$$

welche giebt

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(v-\pi) = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\mathrm{tghp}\,\frac{1}{2}\,w. \tag{9}$$

Die Formeln zur Berechnung der relativen Bahn zweier Körper, die sich in dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes abstossen, sind also:

$$(10)\quad \begin{cases} w + e \,\mathrm{sinhp}\, w = \dfrac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(t - t_0), \\ r = a(1 + e \,\mathrm{coshp}\, w), \\ \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{2}(v - \pi) = \sqrt{\dfrac{e-1}{e+1}}\; \mathrm{tghp}\, \dfrac{1}{2}\, w. \end{cases}$$

Will man die Bewegung in *drei* Dimensionen untersuchen, so kann man die Coordinaten als geschlossene Functionen der Hilfsveränderlichen w ausdrücken.

Nach der Hypothese von Bessel werden die *Schweife der Kometen* von kleinen Partikeln gebildet, die nach dem genannten Gesetz Kern des Kometen abgestossen werden. Ich werde mich einen Augenblick bei dieser Frage aufhalten.

Für die Bahn eines *Kometenkerns* werde ich eine Parabel annehmen. Diejenigen Grössen, die auf den *Kern* eines Kometen sich beziehen, werde ich mit *grossen* Buchstaben bezeichnen, die entsprechenden Grössen für ein abgestossenes Partikelchen dagegen mit *kleinen* Buchstaben. Es bedeutet also z. B. R und V den Radius vector und die Länge des Kerns, r und v die entsprechenden Grössen für eine abgestossene Partikel. Es gelten also folgende Gleichungen:

Für den Kern:

$$(11)\quad \begin{cases} W + \dfrac{1}{3} W^3 = \dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\, Q^{3/2}}(t - T_0), \\ R = Q(1 + W^2), \\ W = \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{2}(V - \Pi), \end{cases}$$

Für die Partikel:

$$(11^*)\quad \begin{cases} w + e \,\mathrm{sinhp}\, w = \dfrac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(t - t_0), \\ r = a(1 + e \,\mathrm{coshp}\, w), \\ \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{2}(v - \pi) = \sqrt{\dfrac{e-1}{e+1}}\; \mathrm{tghp}\, \dfrac{1}{2}\, w. \end{cases}$$

Wenn wir mit S und s die absolute Geschwindigkeit des Kerns und der Partikel bezeichnen, so ist weiter nach § 1 (2)

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{R} \tag{12}$$

und

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{2\mu_1}{r} + 2h_1. \tag{12*}$$

Es ist ferner nach dem Flächenintegral

$$\left\{\begin{aligned} R^2\frac{dV}{dt} &= H_2, \\ r^2\frac{dv}{dt} &= h_2. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Zwischen H_2, h_2, h_1 und den Elementen der Bahnen bestehen folgende Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} H_2 &= \sqrt{2\mu Q}, \\ h_2 &= \sqrt{\mu_1 a(e^2-1)}, \\ h_1 &= \frac{\mu_1}{2a}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ich werde nun die Annahme machen, dass *in dem Zeitmoment, in welchem die Partikel von dem Kometenkern abgesondert wird, die absoluten Geschwindigkeiten des Kerns und der Partikel* — in Bezug auf Richtung und Grösse — *gleich sind.*

Es sei also dann

$$r = R; \qquad v = V,$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dt}; \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt}.$$

Aus den Gleichungen (12), (12*), (13) und (14) leitet man nun folgende Relationen zwischen den Elementen der Partikel und den Coordinaten des Kerns in der Parabel ab:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2\mu}{R} &= -\frac{2\mu_1}{R} + \frac{\mu_1}{a}, \\ 2\mu Q &= \mu_1 a(e^2-1). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Hieraus kann man zu jeder Zeit die Grösse der halben grossen Achse und der Excentricität in der von der Partikel beschriebenen Hyperbel ableiten. Um die übrigen Elemente abzuleiten, setzen wir in der Polargleichung der Hyperbel (8) R und V statt r und v ein und bekommen dann

$$\cos(V - \pi) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{a(e^2 - 1)}{R}\right),$$

oder nach (15)

$$\cos(V - \pi) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{2\mu}{\mu_1}\frac{Q}{R}\right), \tag{16}$$

woraus π gefunden wird.

Wird die Partikel zur Zeit $t = T$ abgesondert, so bekommt man zur Bestimmung der Zeit — t_0 — für den Durchgang der Partikel durch das Perihel (in der Hyperbel) aus (11*)

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{coshp} w &= \frac{1}{e}\left(\frac{R}{a} - 1\right), \\ \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(T - t_0) &= w + e \operatorname{sinhp} w, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

wo

$$\operatorname{sinhp} w = \sqrt{\operatorname{coshp}^2 w - 1}.$$

Die Formeln zur Berechnung der Elemente in der von der Partikel beschriebenen Hyperbel werden also, nach einigen Reductionen,

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{R}{2\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)}, \\ e^2 &= 1 + \frac{4\mu}{\mu_1}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)\frac{Q}{R}, \\ \cos(V - \pi) &= \frac{1 + \frac{2\mu}{\mu_1}\frac{Q}{R}}{\sqrt{1 + \frac{4\mu}{\mu_1}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)\frac{Q}{R}}}, \\ \operatorname{coshp} w &= \frac{1 + \frac{2\mu}{\mu_1}}{\sqrt{1 + \frac{4\mu}{\mu_1}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)\frac{Q}{R}}}, \\ \frac{\sqrt{\mu_1}}{a^{3/2}}(T - t_0) &= w + e \operatorname{sinhp} w. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Aus diesen Formeln können wir einige allgemeine Schlüsse ziehen:

Die *halbe grosse Achse* in der von der Partikel beschriebenen Hyperbel hat beim Periheldurchgang des Kometenkerns sein *Minimum* und wächst dann stetig in's Unendliche.

Die *Excentricität* erreicht beim Periheldurchgang des Kerns einen *Maximalwerth* und nimmt dann stetig gegen die Einheit ab.

Beim Periheldurchgang des Kometenkerns hat man

$$a = \frac{Q}{2\left(1 + \frac{\mu}{\mu_1}\right)},$$

$$e^2 = \left(1 + 2\frac{\mu}{\mu_1}\right)^2,$$

$$\pi = \Pi,$$

$$t_0 = T_0.$$

Die Bahn ist also dann eine Hyperbel, welche die vom Kern beschriebene Parabel im Vector tangirt, und deren Parameter den Werth

$$a(e^2 - 1) = 2\frac{\mu}{\mu_1} Q$$

hat. *Diesen Werth hat übrigens der Parameter sämmtlicher Hyperbeln.*

Die *Scheitellänge* (π) der Hyperbeln ist beim Periheldurchgang des Kerns gleich Π, und nähert sich mit wachsendem Abstand dem Werthe $\pi = V$.

In Bezug auf die Zeit für den Durchgang der Partikel durch den Scheitel (das Perihel) der Hyperbel ist zu bemerken — was zwar nicht direct aus den Formeln (18) ersichtlich ist —, dass, wenn die Partikel *vor* dem Periheldurchgang abgesondert wird, $T - t_0$ *negativ* ist, und wenn die Partikel erst *nach* dem Periheldurchgang den Kometenkern verlässt, $T - t_0$ *positiv* ist. Im ersteren Falle wird die Partikel also nach der Absonderung durch den Scheitelpunkt der Hyperbel gehen, im letzteren Falle wird sie sich immer mehr von ihm entfernen. Dass dem so ist, ergiebt sich unmittelbar aus den Anfangsbedingungen der Bewegung. Die

Bahnen sind sonst vor und nach dem Periheldurchgang einander gleich.

Bei der Bewegung des Kometenkerns werden nun fortwährend Partikelchen von dem Kern abgestossen, und ein jedes beschreibt seine besondere Hyperbel. Sämmtliche Partikel bilden zusammen den *Schweif*. Die Form des Schweifes in verschiedenen Punkten der Bahn und bei verschiedenen Annahmen über die Grösse der abstossenden Kraft (μ_1) lässt sich mit Hilfe der entwickelten Formeln bestimmen. Ich werde mich indessen auf einen einfachen Fall beschränken, *dass nämlich* $\mu_1 = 0$ *ist*, dass also die Bewegung der Partikelchen von der Attraction der Sonne wie von der Repulsion derselben unabhängig ist. Die Bahnen werden dann gerade Linien, welche die Parabel umhüllen. *Nach der Anschauung von* Zöllner, *ebenso wie nach anderen Kometentheorien* (z. B. der von Arrhenius) *müssen immerhin in den Kometenschweifen solche Partikel vorkommen*, so dass folglich die betreffende Annahme nicht eine leere Fiction ist. Uebrigens ist zu bemerken, dass man immer für jedes Repulsionsgesetz den ersten Theil der Bahn nach der Absonderung als geradlinig betrachten kann.

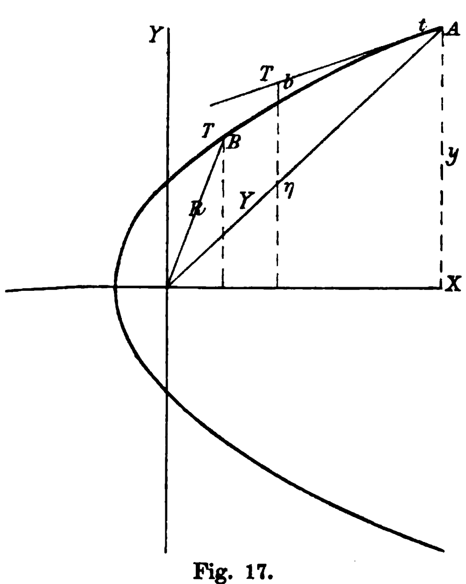


Fig. 17.

Wir betrachten die Bahn einer Partikel P, die zur Zeit t abgesondert wird. Der Komet (und die Partikel) befinde sich dann in A. Zur Zeit T befindet sich der Komet in B, die Partikel hat sich längs der Tangente in A bewegt und befindet sich in b.

Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in den Focus der Parabel (die Sonne), die X-Achse sei längs der Achse der Parabel gerichtet, die positive Y-Achse so gelegt, dass die Y-Coordinaten

des Kometen *vor* dem Periheldurchgang positiv sind. Bezeichnen wir nun mit x und y die Coordinaten des Kometen (und der Partikel) zur Zeit t, mit ξ und η die Coordinaten der Partikel zur Zeit T, mit θ den Winkel, den die Geschwindigkeit des Kometen mit der negativen X-Achse bildet, so hat man

$$(19)\quad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{ds}{dt}\cos\theta\,(T-t), \\[2ex] \eta = y - \dfrac{ds}{dt}\sin\theta\,(T-t), \end{cases}$$

wo $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit bezeichnet.

Auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Parabel hat man

$$(20)\quad \theta = 90^\circ + \frac{1}{2}(v-\pi),$$

und da nach § 5 (14)

$$w = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(v-\pi),$$

so ist also

$$(20^*)\quad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{w}{\sqrt{w^2+1}}, \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{w^2+1}}. \end{cases}$$

Es ist ferner nach (12)

$$(21)\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{q}\sqrt{w^2+1}}.$$

Nach § 5 (14*) hat man weiter

$$(22)\quad x = q(w^2-1), \qquad y = -2qw.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (19) ein, so wird

$$(23)\quad \begin{cases} \xi = q(w^2-1) + \dfrac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{q}}\,\dfrac{w}{w^2+1}(T-t), \\[2ex] \eta = -2qw - \dfrac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{q}}\,\dfrac{1}{w^2+1}(T-t). \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit w den Werth dieser Hilfsgrösse für die Zeit t, mit W ihren Werth für die Zeit T, so ist nach (11)

$$w + \frac{1}{3} w^3 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - t_0),$$

$$W + \frac{1}{3} W^3 = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (T - t_0),$$

so dass

$$T - t = \frac{\sqrt{2} q^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[W - w + \frac{1}{3} (W^3 - w^3) \right]. \tag{24}$$

Setzt man diesen Werth in (23) ein, so wird endlich

$$(25) \quad \begin{cases} \xi = q(w^2 - 1) + \dfrac{2qw}{w^2 + 1} \left[W - w + \dfrac{1}{3} (W^3 - w^3) \right], \\ \eta = -2qw \quad - \dfrac{2q}{w^2 + 1} \left[W - w + \dfrac{1}{3} (W^3 - w^3) \right]. \end{cases}$$

Hieraus erhält man

$$\xi + w\eta + q(1 + w^2) = 0, \tag{25*}$$

welches die Gleichung für die Tangente ist.

Lassen wir nun W constant bleiben und geben der Zeit alle Werthe, welche kleiner als T sind, *so erhalten wir die Werthe von ξ und η für sämmtliche Partikel, welche zur Zeit T den Schweif bilden.* Die Gleichung für die vom Schweif gebildete Curve erhält man also, indem man w zwischen den beiden Gleichungen (25) eliminirt.

Nennen wir X und Y die Coordinaten des Kometen zur Zeit T, so ist

$$(26) \quad \begin{cases} X = q(W^2 - 1), \\ Y = -2qW. \end{cases}$$

Wir führen weiter die Bezeichnungen

$$\Xi = \frac{1}{q} (\xi - X),$$

$$H = \frac{1}{q} (\eta - Y)$$

ein, und es ist dann

$$\Xi = w^2 - W^2 + \frac{2w}{w^2+1}\left[W - w + \frac{1}{3}(W^3 - w^3)\right],$$

$$H = -2(w-W) - \frac{2}{w^2+1}\left[W - w + \frac{1}{3}(W^3 - w^3)\right],$$

oder

$$(27)\quad \begin{cases} \Xi = (w - W)\left[w + W - \frac{2w}{w^2+1}\left(1 + \frac{1}{3}(w^2 + wW + W^2)\right)\right], \\ H = (w - W)\left[\quad -2 + \frac{2}{w^2+1}\left(1 + \frac{1}{3}(w^2 + wW + W^2)\right)\right]. \end{cases}$$

Für diejenigen Theile des Schweifes, die in der Nähe des Kernes liegen, ist $w - W$ klein. Es ist deswegen angemessen, eine Grösse u einzuführen, welche wir so definiren, dass

$$(28)\qquad w = W + u,$$

und es wird dann nach einigen Reductionen

$$(29)\quad \begin{cases} \Xi = u^2\left[-1 + \frac{2(W+u)(W+\frac{2}{3}u)}{1 + W^2 + 2Wu + u^2}\right]. \\ H = -\frac{2u^2(W + \frac{2}{3}u)}{1 + W^2 + 2Wu + u^2}. \end{cases}$$

Wird u zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man die Gleichung für den Schweif des Kometen.

Ist im Besonderen u klein — zieht man also denjenigen Theil des Schweifes in Betracht, der in der Nähe des Kerns liegt — so ist

$$(30)\quad \begin{cases} \Xi = \quad u^2\frac{W^2-1}{W^2+1}, \\ H = -u^2\frac{2W}{W^2+1}, \end{cases}$$

woraus man bekommt

$$(W^2 - 1)H + 2W\Xi = 0.$$

Zieht man aber die Relationen (26) in Betracht, so kann man diese Gleichung in der Form

$$(31)\qquad X H - Y \Xi = 0$$

schreiben. Für kleine Werthe von u ist also die Schweifcurve eine gerade Linie, die in der Richtung des Radius Vector liegt.

Hieraus folgt nun, dass die allgemeine Curve (29) beim Kern des Kometen eine Spitze hat, deren Tangente gegen die Sonne gerichtet ist. Wir finden also hierin die Erklärung der bekannten Thatsache, dass die Schweife der Kometen von der Sonne hinweg gerichtet sind. Es ist zu bemerken, dass dieser Satz für jeden Werth von μ_1 seine Richtigkeit beibehält.

Aus (29) folgt die Relation

$$(32)\qquad \Xi + (W + u) H + u^2 = 0\,.$$

Wird u zwischen dieser Gleichung und der zweiten Gleichung in (29) eliminirt, so bekommt man zwischen den Coordinaten eine Gleichung vierten Grades.

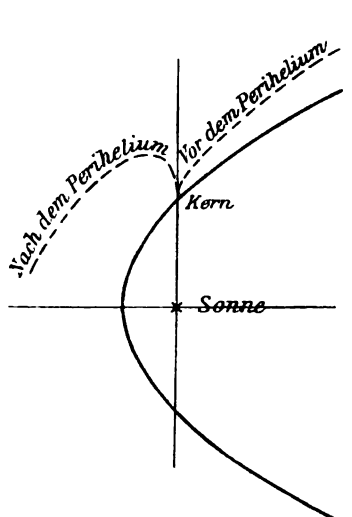


Fig. 18. Kometenschweife.

Zur Illustration der Frage von der Form der Schweife der Kometen gebe ich in der beistehenden Figur die Form an, welche der Schweif unter den gemachten Voraussetzungen annehmen würde, wenn der Komet 90° vom Perihelium entfernt steht, sowohl vor wie nach dem Durchgang durch das Perihelium.

Es ist dann $W = \pm 1$. Es genügt aber, den einen von diesen Werthen von W in (29) einzusetzen. Man bekommt dann, wenn u sowohl positive wie negative Werthe annimmt, die Form des Schweifes sowohl vor wie nach dem Durchgang durch das Perihelium. Setzt man $W = -1$, so ist

$$H = -\frac{2u^2\left(-1+\frac{2}{3}u\right)}{2-2u+u^2},$$

$$\Xi = (1-u)H - u^2.$$

Für negative u-Werthe erhält man den Schweif *vor* dem Durchgang durch das Perihel. Für positive u-Werthe den Schweif *nach* diesem Durchgang.

In den Untersuchungen von Bessel über die Form der Schweife der Kometen werden die Coordinaten der Partikel nach den Potenzen der Zeit entwickelt. Diese Methode ist besonders von Brédichin weiter ausgeführt worden in seinen bekannten Untersuchungen über die Schweife der Kometen.

§ 8. Das Zwei-Körperproblem als Beispiel bedingt periodischer Bewegungen.

Nach § 2 (7) waren die Polarcoordinaten im Zwei-Körperproblem durch folgende Formeln bestimmt:

$$(1)\quad \begin{cases} H_1 + t = \displaystyle\int_{r_2}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\[2ex] H_2 = h_2 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} - h_2 \int_{r_2}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \\[2ex] H_3 = \theta - h_3 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}. \end{cases}$$

Wenn r und φ für zwei Werthe von t denselben Werth besitzen und die entsprechenden Werthe für θ sich um ganze Vielfache von 2π unterscheiden, so ist die Lage der beiden Körper zu diesen beiden Zeiten dieselbe. Wenn wir also mit

Θ eine beliebige periodische Function von θ bezeichnen mit der Periode 2π, so sind nach (1) r, φ und Θ bedingt periodische Functionen von $H_1 + t$, H_2 und H_3. Für die *Elementarperioden* ω_{ij} erhält man nach II § 3 folgende Werthe

$$\omega_{11} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{R}}, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{31} = 0,$$

$$\omega_{12} = -h_2 \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2\sqrt{R}}, \quad \omega_{22} = \int_{-i}^{+i} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}, \quad \omega_{32} = 0,$$

$$\omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = -\cos i \int_{-i}^{+i} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\Phi}}, \quad \omega_{33} = \pi,$$

wo

$$R = \frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2},$$

$$\Phi = 1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 \varphi},$$

und wo die Werthe für h_2 und h_3 aus § 4 (23) eingeführt worden sind.

Nach § 4 (16*) und (17) hat man

$$\omega_{11} = T = \frac{\pi}{n},$$

wo n die mittlere Bewegung bezeichnet.

Nach § 4 (5) lautet die Relation zwischen der excentrischen Anomalie w dem Radius vector und r

$$\frac{dw}{\sqrt{2f}} = \frac{dr}{r\sqrt{R}}. \tag{3}$$

Führen wir nun in ω_{12}, mittelst (3) dw statt dr ein, so bebekommeu wir für ω_{12} den Ausdruck

$$\omega_{12} = -\frac{h_2}{a\sqrt{2f}} \int_0^\pi \frac{dw}{1 - e\cos w},$$

oder nach § 4 (23)

$$\omega_{12} = -\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-e^2}\,dw}{1 - e\cos w}. \tag{4*}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w,$$

so wird

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}\,dw}{1-e\cos w},$$

und folglich hat man

$$\omega_{12} = -\pi. \tag{4}$$

Wir haben weiter

$$\omega_{22} = \int_{-i}^{+i} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}}.$$

Setzt man

$$\sin\varphi = \sin i \sin u, \tag{5*}$$

woraus folgt

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}},$$

so bekommt man also

$$\omega_{22} = \pi. \tag{5}$$

Um die Elementarperiode ω_{23} zu berechnen, führen wir wieder den Winkel u mittelst der Relation (5*) ein, und bekommen dann

$$-\omega_{23} = \cos i \int_0^\pi \frac{du}{1-\sin^2 i \sin^2 u},$$

oder

$$-\omega_{23} = \frac{\cos i}{2}\int_0^\pi \left[\frac{du}{1-\sin i\sin u} + \frac{du}{1+\sin i \sin u}\right].$$

Wir bemerken aber, dass diese Integrale von genau derselben Form wie das Integral (4*) sind, und es wird also

$$\omega_{23} = -\pi. \tag{6}$$

Endlich hat man

$$\omega_{33} = \quad \pi.$$

Stellen wir die Resultate zusammen, so hat man also

$$
(7)\quad \begin{cases}
\omega_{11} = \dfrac{\pi}{n}, & \omega_{21} = 0, & \omega_{31} = 0, \\
\omega_{12} = -\pi, & \omega_{22} = \pi, & \omega_{32} = 0, \\
\omega_{13} = 0, & \omega_{23} = -\pi, & \omega_{33} = \pi.
\end{cases}
$$

Für die Determinante $|\omega_{ij}|$ bekommt man also folgenden Werth:

$$
(8)\qquad |\omega_{ij}| = \frac{\pi^3}{n},
$$

welcher demnach von Null verschieden ist. Wir können also die Hilfsveränderlichen u_i II § 3 (21) einführen, indem wir setzen

$$
\begin{aligned}
\pi(t+H_1) &= \frac{\pi}{n} u_1, \\
\pi H_2 &= -\pi u_1 + \pi u_2, \\
\pi H_3 &= -\pi u_2 + \pi u_3,
\end{aligned}
$$

oder

$$
(8^*)\quad \begin{cases}
u_1 = n(t+H_1), \\
-u_1 + u_2 = H_2, \\
-u_2 + u_3 = H_3,
\end{cases}
$$

so dass

$$
(8^{**})\quad \begin{cases}
u_1 = n(t+H_1), \\
u_2 = n(t+H_1) + H_2, \\
u_3 = n(t+H_1) + H_2 + H_3.
\end{cases}
$$

Das Resultat dieser Untersuchung ist also, dass in dem Problem der zwei Körper die Coordinaten r, φ und Θ periodische Functionen von u_1, u_2 und u_3 sind mit der Periode 2π, oder, was auf dasselbe hinauskommt, periodische Functionen der drei Grössen

$$
n(t+H_1),\ H_2,\ H_3
$$

mit der Periode 2π für eine jede. Erinnern wir uns nun, dass H_3 gleich der Knotenlänge (Ω) ist und H_2 gleich der Differenz zwischen

der Länge des Perihels (π) und derjenigen des Knotens, so finden wir also, dass eine beliebige endliche Function (ψ) von r, φ und Θ unter folgender Form geschrieben werden kann:

$$\psi(r, \varphi, \Theta) = \sum_{\substack{i \\ j \\ k}}\Big\}_{-\infty}^{+\infty} A_{i,j,k}\, e^{\sqrt{-1}[in(t+H_1)+j\Omega+k(\pi-\Omega)]} \tag{9}$$

Die Coefficienten $A_{i,j,k}$ können nach der Formel II § 3 (24*) berechnet werden und sind nur von den Werthen der halben grossen Achse, der Excentricität und der Neigung der Planetenbahn abhängig.

In speciellen Fällen kann die Form der Entwickelung (9) vereinfacht werden. So findet man nach (1) unmittelbar, dass r eine periodische Function von u_1 ist, in welcher H_2 und H_3 nicht vorkommen. Weiter ist φ eine periodische Function von u_1 und H_2, in welcher Function H_3 nicht vorkommt. Und dies ist offenbar auch mit $\theta - H_3$ der Fall.

Die Veränderliche u_1 wird die *mittlere Anomalie* des Planeten genannt. Wir bezeichnen sie mit M, so dass

$$M = n(t + H_1). \tag{10}$$

Wir sind also nun zu folgendem Theorem gelangt:

Jede Function $\psi(r, \varphi, \theta - \Omega)$, die in $\theta - \Omega$ periodisch ist mit der Periode 2π, lässt sich als eine periodische Function von M und $\pi - \Omega$ darstellen.

Legt man die X-Achse in den Knoten, so werden die rechtwinkligen Coordinaten Functionen von der genannten Natur. Wir werden die entsprechenden Entwickelungen dieser Functionen im nächsten Paragraphen untersuchen.

Da zwischen den Elementarperioden folgende Relationen bestehen

$$\omega_{12} + \omega_{22} + \omega_{32} = 0,$$

$$\omega_{13} + \omega_{23} + \omega_{33} = 0,$$

so sind im Zwei-Körperprobleme diejenigen Bedingungen erfüllt,

welche nach II § 3 für eine in der Zeit periodische Bewegung erforderlich sind. Die Länge der Periode ist gleich $2\omega_{11}$ oder $\frac{2\pi}{n}$, was schon aus den vorigen Paragraphen bekannt ist.

§ 9. Darstellung der Coordinaten als Functionen der Zeit.

Bevor ich zu den rechtwinkligen Coordinaten übergehe, wil ich zuerst den Radius Vector als Function der Zeit darstellen.

Da der Radius Vector durch die Gleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{h^2_2}{r^2} \tag{1}$$

bestimmt ist, so wissen wir nach II § 2, dass r eine periodische Function der Zeit ist mit der Periode $\frac{2\pi}{n}$, wo nach § 4 (16*)

$$\frac{\pi}{n} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h^2_2}{r^2}}}. \tag{2}$$

Führt man die mittlere Anomalie (M) aus dem vorigen Paragraphen ein, so dass

$$M = n(t + H_1) = n(t - t_\pi), \tag{3}$$

wo t_π die Zeit des Durchgangs des Planeten durch das Perihel bezeichnet, so wird r eine *gerade* Functionvon M, die nach den Cosinus der Vielfachen von M entwickelt werden kann. Wir setzen nun

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cos M + B_2 \cos 2M + \ldots, \tag{3*}$$

und für die Coefficienten hat man nach dem Theorem von Fourier den Werth

$$B_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{r}{a} \cos iM\,dM. \tag{4}$$

Zur Berechnung dieses Integrals führen wir die Hilfsgrösse w aus § 4 ein. Nach den Formeln (13) und (18) in den genannten Paragraphen hat man

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{a} = 1 - e\cos w, \\ M = w - e\sin w, \end{cases}$$

also

$$(5^*)\quad dM = (1 - e\cos w)\,dw.$$

Durch partielle Integration erhält man unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (5)

$$B_i = -\frac{2e}{\pi i}\int_0^\pi \sin iM \sin w\,dw,$$

oder

$$B_i = \frac{e}{\pi i}\int_0^\pi \cos(\overline{i+1}\,w - ie\sin w)\,dw,$$

$$-\frac{e}{\pi i}\int_0^\pi \cos(\overline{i-1}\,w - ie\sin w)\,dw.$$

Wir sind also zu der Betrachtung von Integralen von folgender Form geführt

$$(6)\quad J_k^i = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[iw - k\sin w]\,dw$$

und erhalten mit dieser Bezeichnung

$$(7)\quad B_i = \frac{e}{i}\left[J_{ie}^{i+1} - J_{ie}^{i-1}\right].$$

Integrale von der Form (6) werden Bessel'sche *Integrale* oder auch Bessel'sche *Functionen* genannt.

Wird unter ξ ein Werth von w verstanden, der zwischen den beiden Grenzen 0 und π des Integrals liegt, so ist

$$(8)\quad J_k^i = \cos(i\xi - k\sin\xi).$$

Aus diesem Ausdruck folgt:

1) dass J_k^i stets, für reelle i und k, zwischen den Werthen -1 und $+1$ liegt;

2) dass J_k^i für keinen (reellen oder imaginären) Werth von k unendlich werden kann. *Man kann demnach die* Bessel'sche *Function J_k^i in eine beständige convergente Reihe nach den Potenzen von k entwickeln.*

Diese Entwickelung lautet

$$(9)\qquad J_k^i = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^i}{\underline{|i}}\left\{1 - \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{1(i+1)} + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^4}{\underline{|2}\,(i+1)(i+2)} - \cdots\right\}.$$

Zwischen den J-Functionen besteht die folgende Recursionsformel

$$(10)\qquad k J_k^{i-1} - 2 i J_k^i + k J_k^{i+1} = 0,$$

mittelst welcher man sämmtliche Functionen berechnen kann, wenn J^0 und J^1 bekannt sind. Diese letzteren sind von Bessel tabulirt worden. Handelt es sich darum, die Bessel'schen Functionen für hohe Werthe von i zu berechnen, so ist eine von Hansen gegebene Kettenbruchentwickelung zu empfehlen.

Die Bessel'schen Functionen befriedigen die folgende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(11)\qquad \frac{d^2 J}{d k^2} + \frac{1}{k}\frac{d J}{d k} + \left(1 - \frac{i^2}{k^2}\right) J = 0.$$

In Bezug auf die Theorie dieser Differentialgleichung verweise ich auf „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen" von L. Schlesinger.

Die Formel (7) für B_i versagt für $i = 0$. Gehen wir aber zu der Formel (4) zurück, so erhält man leicht

$$(12)\qquad \frac{1}{2} B_0 = 1 + \frac{1}{2} e^2.$$

Wir wollen nun zu der Darstellung der rechtwinkligen Coordinaten als Functionen der Zeit übergehen.

Legen wir die X-Achse in den Knoten, so hat man für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 nach § 4 folgende Ausdrücke durch die excentrische Anomalie:

$$(13)\begin{cases} \frac{x_0}{a} = (\cos w - e)\cos(\pi - \Omega) - \sqrt{1-e^2}\sin w \sin(\pi - \Omega); \\ \frac{y_0}{a} = \cos i\left[\sqrt{1-e^2}\sin w \cos(\pi - \Omega) + (\cos w - e)\sin(\pi - \Omega)\right]; \\ \frac{z_0}{a} = \sin i\left[\sqrt{1-e^2}\sin w \cos(\pi - \Omega) + (\cos w - e)\sin(\pi - \Omega)\right]. \end{cases}$$

Die Coefficienten in der Entwickelung von x, y und z nach den Vielfachen der mittleren Anomalie sind also von der Berechnung der folgenden Integrale abhängig

$$(14)\begin{cases} C_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\cos w - e)\cos i M\, dM, \\ D_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi}\int_0^\pi \sin w \sin i M\, dM. \end{cases}$$

Man findet nun

$$C_i = \frac{2}{\pi i}\int_0^\pi (\cos w - e)\frac{d(\sin i M)}{dM}\, dM,$$

oder

$$(15)\qquad C_i = \frac{2}{\pi i}\int_0^\pi \sin i M \sin w\, dw.$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$(16)\qquad D_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi i}\int_0^\pi \cos i M \cos w\, dw.$$

Setzen wir hier den Ausdruck (5) für M ein, so bekommt man, unter Berücksichtigung von (6)

$$(17)\begin{cases} C_i = \frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}\right), \\ D_i = \sqrt{1-e^2}\,\frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}\right). \end{cases}$$

Für $i=0$ erhält man nach (14)

$$C_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos w\,(1 - e\cos w)\,dw - 2e,$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e\cos^2 w\,dw - 2e = -3e,$$

$$D_0 = 0.$$

Nimmt man auf die unmittelbar sich ergebende Relation

$$J_{-k}^{-i} = J_k^i \tag{18}$$

Rücksicht, so ist also

$$\left\{\begin{aligned} \cos w - e &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos iM, \\ \sqrt{1-e^2}\sin w &= \sqrt{1-e^2}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin iM, \end{aligned}\right. \tag{18*}$$

wo man für $i=0$ in der letzten Reihe Null, in der ersten $-\frac{3}{2}e$ zu schreiben hat.

Legen wir in die Bahnebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen X-Achse von der Sonne nach dem Perihel gerichtet ist, und bezeichnen wir die Coordinaten mit ξ und η, so hat man, wie aus (13) unmittelbar ersichtlich ist,

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= a(\cos w - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin w, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

und man kann also schreiben

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \xi\cos(\pi - \Omega) - \eta\sin(\pi - \Omega), \\ y_0 &= [\xi\sin(\pi - \Omega) + \eta\cos(\pi - \Omega)]\cos i, \\ z_0 &= y_0 \operatorname{tg} i. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Hiernach hat man

$$
(21)\quad \begin{cases} \xi = a \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos iM, \\ \eta = a\sqrt{1-e^2} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin iM, \end{cases}
$$

woraus die Entwickelung von x, y und z hervorgeht. Diese Coordinaten sind somit als periodische Functionen der Zeit dargestellt, wobei die Coefficienten als periodische Functionen von $\pi - \Omega$ auftreten, wie im vorigen Paragraphen *a priori* bewiesen wurde.

Die Reihen (21) convergiren für jeden Werth der Zeit und für jeden Werth der Excentricität (< 1).

Mittelst (9) kann man die Coordinaten nach positiven Potenzen der Excentricität entwickeln. Die so erhaltene Reihe — nach den successiven Potenzen der Excentricität geordnet — convergirt dagegen nicht für alle diejenigen Werthe der Excentricität, die kleiner als die Einheit sind. Wir werden in einem folgenden Abschnitt die Grösse des Convergenzbereiches dieser Reihen untersuchen.

Gehen wir nun zu einem beliebigen Coordinatensystem über, dessen X-Achse den Winkel Ω mit dem Knoten bildet, und nennen die Coordinaten in diesem System x, y, z, so hat man

$$
(22)\quad \begin{cases} x = x_0 \cos\Omega - y_0 \sin\Omega, \\ y = x_0 \sin\Omega + y_0 \cos\Omega, \\ z = z_0, \end{cases}
$$

und wir können somit nach (20) diese Coordinaten in folgender Form schreiben:

$$
(23)\quad \begin{cases} x = A\,\xi + B\,\eta, \\ y = A_1\xi + B_1\eta, \\ z = A_2\xi + B_2\eta, \end{cases}
$$

wo die Coefficienten A und B folgende Werthe haben:

$$
(23^*) \begin{cases}
A = \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i, \\
B = -\sin(\pi - \Omega)\cos\Omega - \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i, \\
A_1 = \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega + \sin(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i, \\
B_1 = -\sin(\pi - \Omega)\sin\Omega + \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i, \\
A_2 = \sin(\pi - \Omega)\sin i, \\
B_2 = \cos(\pi - \Omega)\sin i.
\end{cases}
$$

Mittelst (23) und (21) sind die allgemeinen Ausdrücke der Coordinaten im Zwei-Körperproblem als Functionen der Zeit gegeben.

FÜNFTER ABSCHNITT

DAS PROBLEM DER DREI KÖRPER



§ I. Allgemeine Integrale des Problems der drei Körper.

Wenn wir die absoluten Coordinaten der Masse m_i mit x_i, y_i, z_i bezeichnen, so hat die Kräftefunction (V) den Ausdruck

$$V = \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} \qquad (ij = 23, 31, 12), \tag{1}$$

wo k^2 die Attractionsconstante bedeutet und

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2. \tag{1*}$$

Die Bewegungsgleichungen sind nun

$$\left\{\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial z_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Es ist bei gewissen Untersuchungen vortheilhaft, die drei Coordinaten mit *demselben Buchstaben* zu bezeichnen, und es seien dann

x_1, x_2, x_3 die absoluten Coordinaten des 1. Körpers,

x_4, x_5, x_6 „ „ „ „ 2. „

x_7, x_8, x_9 „ „ „ „ 3. „ .

Der Symmetrie wegen ist es dann angemessen, die Masse des ersten Körpers mit m_1 *oder* m_2 *oder* m_3 zu bezeichnen, diejenige des zweiten Körpers mit m_4 *oder* m_5 *oder* m_6 u. s. w. Setzen wir weiter

(3) $$y_i = m_i \frac{d x_i}{d t}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 9)$$

so bekommt man für die lebendige Kraft T den Ausdruck

(4) $$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} y_i^2.$$

Da nun die Kräftefunction nur von den Coordinaten, und nicht *explicite* von der Zeit abhängt, so ist

(5) $$H = T - V,$$

und die canonischen Differentialgleichungen lauten

(6) $$\frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{d y_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9).$$

Zu den Differentialgleichungen (2) oder (6) existiren 10 algebraische Integrale. Die Existenz dieser Integrale ist eine Folge gewisser Eigenschaften der charakteristischen Function. Es ist nämlich:

1) *H von der Zeit* (explicite) *unabhängig.* Hieraus folgt das Integral der lebendigen Kraft;

2) *H von der Lage des Anfangspunktes der Coordinaten unabhängig*, weil bei einer Aenderung dieser Lage die Werthe der Geschwindigkeiten und der Abstände nicht beeinflusst werden. Hieraus folgen die 6 Integrale des Schwerpunktes; und endlich bleibt

3) *V bei einer Drehung des Coordinatensystems unverändert.* Hieraus gehen die 3 Flächenintegrale hervor.

Wir wollen die genannten Gesichtspunkte vollständiger ausführen. Da H die Zeit explicite nicht enthält, so existirt nach I § 8 das Integral

(7) $$H = \text{Const.} = h,$$

das man das *Integral der lebendigen Kraft* nennt.

Setzt man die Werthe für T und V in H ein, so lautet dies Integral also

$$(7^*) \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\frac{y_i^2}{m_i} = \sum\frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h,$$

oder

$$(7^{**}) \qquad \frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2 = \sum\frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}} + h.$$

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten um die Grösse $-\alpha$ in der Richtung der X-Achse verschoben, so werden x_1, x_4 und x_7 dabei um den Werth α vermehrt, die übrigen Coordinaten aber bleiben unverändert, und da bei einer solchen Verschiebung H nicht geändert wird, so hat man

$$0 = \sum_{i=0}^{2}\frac{\partial H}{\partial x_{1+3i}},$$

und ebenso ist

$$0 = \sum_{i=0}^{2}\frac{\partial H}{\partial x_{2+3i}} = \sum_{i=0}^{2}\frac{\partial H}{\partial x_{3+3i}}.$$

Nach (6) ist somit

$$0 = \sum\frac{d y_{1+3i}}{d t} = \sum\frac{d y_{2+3i}}{d t} = \sum\frac{d y_{3+3i}}{d t},$$

aus welchen Gleichungen, nach Ausführung der Integration, folgt

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2} y_{1+3i} &= a_1, \\ \sum_{i=0}^{2} y_{2+3i} &= a_2, \\ \sum_{i=0}^{2} y_{3+3i} &= a_3, \end{aligned}\right.$$

wo a_1, a_2 und a_3 drei Integrationsconstanten bezeichnen.

Nimmt man indessen auf die Relationen (3) Rücksicht, und bezeichnet mit b_1, b_2, b_3 drei neue Integrationsconstanten, so erhält man durch eine nochmalige Integration

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} \sum m_{1+3i}x_{1+3i} &= a_1 t + b_1, \\ \sum m_{2+3i}x_{2+3i} &= a_2 t + b_2, \\ \sum m_{3+3i}x_{3+3i} &= a_3 t + b_3. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (8) und (9) werden die *Schwerpunktsintegrale* genannt. Nennen wir die Summe der drei Massen M und die Coordinaten des Schwerpunktes X_1, X_2, X_3, so ist nämlich

$$(10) \quad \begin{cases} M X_1 = \sum m_{1+3i} x_{1+3i}, \\ M X_2 = \sum m_{2+3i} x_{2+3i}, \\ M X_3 = \sum m_{3+3i} x_{3+3i}, \end{cases}$$

und folglich hat man nach (9)

$$(10^*) \qquad M X_i = a_i t + b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

und nach (8)

$$Y_i = a_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo

$$(10^{**}) \qquad Y_i = M \frac{d X_i}{d t}.$$

Der Schwerpunkt der drei Körper bewegt sich also geradlinig und mit unveränderlicher Geschwindigkeit.

Da die Kräftefunction V nur von den gegenseitigen Abständen der Körper abhängt, so bleibt sie bei einer Drehung des Coordinatensystems unverändert. Setzt man also

$$\begin{aligned} x'_{1+3i} &= x_{1+3i}, \\ x'_{2+3i} &= x_{2+3i} \cos\varphi - x_{3+3i} \sin\varphi, \qquad (i = 0, 1, 2) \\ x'_{3+3i} &= x_{2+3i} \sin\varphi + x_{3+3i} \cos\varphi, \end{aligned}$$

und drückt die Kräftefunction durch die neuen Coordinaten x'_i aus, so hat man[1]

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_9) = 0$$

oder

$$0 = \sum\left(-\frac{\partial V}{\partial x'_{2+3i}} x'_{3+3i} + \frac{\partial V}{\partial x'_{3+3i}} x'_{2+3i}\right),$$

welche Gleichung offenbar auch ihre Gültigkeit behält, wenn man

---

[1] Vgl. DZIOBEK: Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. S. 40.

statt der gestrichenen Coordinaten die früheren Coordinaten (x_i) einführt. Es ist aber nach (5)

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

und somit ist

$$0 = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial x_{2+3i}} x_{3+3i} - \frac{\partial H}{\partial x_{3+3i}} x_{2+3i}\right).$$

Nimmt man nun auf die Gleichungen (6) Rücksicht, so hat man also

$$0 = \sum\left(x_{2+3i}\frac{d y_{3+3i}}{d t} - x_{3+3i}\frac{d y_{2+3i}}{d t}\right). \tag{11}$$

Durch Permutation erhält man zwei ähnliche Gleichungen. Werden diese Gleichungen integrirt, so erhält man die drei *Flächenintegrale*

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum(x_{2+3i}\,y_{3+3i} - x_{3+3i}\,y_{2+3i}) = c_1,\\
&\sum(x_{3+3i}\,y_{1+3i} - x_{1+3i}\,y_{3+3i}) = c_2,\\
&\sum(x_{1+3i}\,y_{2+3i} - x_{2+3i}\,y_{1+3i}) = c_3,
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

wo c_1, c_2, c_3 die Integrationsconstanten bezeichnen.

Führt man wieder die Bezeichnung x_i, y_i, z_i für die rechtwinkligen Coordinaten der Masse m_i ein, so lauten die Flächenintegrale folgendermaassen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum m_i\left(y_i\frac{d z_i}{d t} - z_i\frac{d y_i}{d t}\right) = c_1,\\
&\sum m_i\left(z_i\frac{d x_i}{d t} - x_i\frac{d z_i}{d t}\right) = c_2,\\
&\sum m_i\left(x_i\frac{d y_i}{d t} - y_i\frac{d x_i}{d t}\right) = c_3.
\end{aligned}\right. \tag{12*}$$

Wird die Richtung der Coordinatenachsen geändert, so ändern sich auch die drei Constanten c_1, c_2, c_3, jedoch so, dass die Summe

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

unverändert bleibt. Man kann die Richtung des Coordinatensystems

so wählen, dass $c_1 = c_2 = 0$. Die so bestimmte XY-Ebene wird von LAPLACE die *unveränderliche Ebene* genannt, und wegen der Bedeutung, welche diese Ebene für gewisse Untersuchungen in der Störungstheorie hat, werde ich die Formeln zur Bestimmung der Lage dieser Ebene ableiten.

Bei einer Drehung des Coordinatensystems gehen die Coordinaten x, y, z in die neuen Coordinaten x', y', z' über, welche mit den vorigen durch eine orthogonale Substitution verbunden sind. Es sei also

$$(13) \quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{cases}$$

wo zwischen den Coefficienten die sechs Relationen

$$(13^*) \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \end{cases}$$

bestehen.

Man bekommt hieraus

$$(14) \quad \begin{cases} y'\frac{dx'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt} = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \\ \qquad + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \\ \qquad + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \end{cases}$$

In den transformirten Coordinaten x', y', z' erhalten die Flächenintegrale die Form

$$(15) \quad \begin{cases} \sum m_i \left(y'\frac{dx'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = c_1', \\ \sum m_i \left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = c_2', \\ \sum m_i \left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = c_3'. \end{cases}$$

Man erhält also aus (14), wenn man mit m_i multiplicirt und die Ausdrücke für alle Körper summirt

$$c_1' = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)c_1 + \\ + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)c_2 + \\ + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)c_3,$$

und hieraus bekommt man nach Permutation der Indices die drei Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} c_1' = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)c_1 + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)c_2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)c_3, \\ c_2' = (\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)c_1 + (\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)c_2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)c_3, \\ c_3' = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)c_1 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)c_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)c_3. \end{cases}$$

Diese Formeln können einfacher geschrieben werden. Man hat in der That

$$(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 + (\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)^2 + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 = \\ = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) - (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)^2 = \\ = 1,$$

und weiter ist identisch

$$\beta_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \beta_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \beta_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0,$$
$$\gamma_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \gamma_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0.$$

Werden diese Gleichungen mit den drei folgenden

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$
$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0$$

verglichen, so findet man, dass

$$\pm\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,$$
$$\pm\alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3,$$
$$\pm\alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,$$

wo linker Hand *gleichzeitig* entweder das Zeichen *Plus* oder das Zeichen *Minus* gelten muss. Wenn aber die beiden Coordinatensysteme *zusammenfallen* sollen, so müssen die Coefficienten α, β, γ folgende Werthe annehmen:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = +1, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0; \\ \alpha_2 = 0, & \beta_2 = +1, & \gamma_2 = 0: \\ \alpha_3 = 0, & \beta_3 = 0, & \gamma_3 = +1. \end{array}$$

Hieraus folgt, dass in den obigen Relationen das *Pluszeichen* allein zulässig ist, und demnach bestehen die Relationen

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2, \\ \alpha_2 = \beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3, \\ \alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1, \end{array} \right.$$

aus welchen durch Permutation sechs ähnliche Relationen folgen. Die Gleichungen (16) werden also

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_1' = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1 c_3, \\ c_2' = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 + \gamma_2 c_3, \\ c_3' = \alpha_3 c_1 + \beta_3 c_2 + \gamma_3 c_3, \end{array} \right.$$

welche Relationen, mit (13) verglichen, den Satz enthalten, dass die Constanten der Flächen — c_1, c_2, c_3 — sich bei einer Drehung des Coordinatensystems wie die Coordinaten selbst transformiren.

Aus (18) folgt, dass

$$(19) \qquad c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = C^2,$$

wo C eine von der Lage des Coordinatensystems unabhängige Constante bezeichnet.

Im Besonderen kann man das Coordinatensystem so drehen, dass $c_1' = 0 = c_2'$.

Werden nun die Gleichungen (18) mit α_1, α_2, α_3 multiplicirt

und die Resultate addirt, ebenso mit β_1, β_2, β_3 u. s. w., so bekommt man die drei Gleichungen

$$(18^*)\qquad \begin{cases} c_1 = \alpha_1 c_1' + \alpha_2 c_2' + \alpha_3 c_3', \\ c_2 = \beta_1 c_1' + \beta_2 c_2' + \beta_3 c_3', \\ c_3 = \gamma_1 c_1' + \gamma_2 c_2' + \gamma_3 c_3', \end{cases}$$

welche für $c_1' = c_2' = 0$ in die folgenden übergehen

$$(19^*)\quad \alpha_3 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},\quad \beta_3 = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},\quad \gamma_3 = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}.$$

Durch diese Gleichungen werden die Cosinus der Winkel bestimmt, welche die Normale der unveränderlichen Ebene mit den ursprünglichen Coordinatenachsen bildet.

Bezeichnet man mit γ die Neigung der unveränderlichen Ebene gegen die XY-Ebene, mit Π den Winkel, den der (aufsteigende) Knoten der unveränderlichen Ebene auf der XY-Ebene mit der X-Achse bildet, so bekommt man unmittelbar aus der nebenstehenden Figur 19:

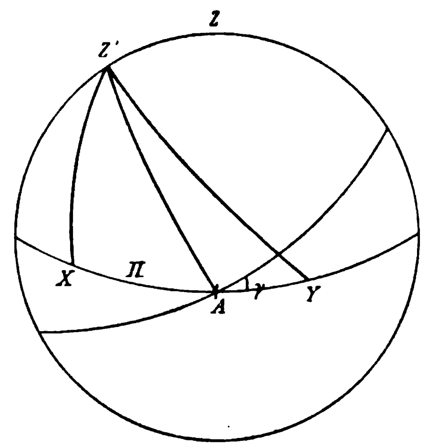


Fig. 19.

$$(19^{**})\begin{cases} \alpha_3 = \quad \sin\gamma \sin\Pi, \\ \beta_3 = -\sin\gamma\cos\Pi, \\ \gamma_3 = \quad \cos\gamma, \end{cases}$$

und hat also zur Bestimmung von γ und Π die Gleichungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\Pi = -\dfrac{c_1}{c_2}, \\ \operatorname{tg}\gamma\sin\Pi = \dfrac{c_1}{c_3}, \\ \operatorname{tg}\gamma\cos\Pi = -\dfrac{c_2}{c_3}. \end{cases}$$

Die in diesem Paragraphen gemachten Auseinandersetzungen behalten unverändert ihre Gültigkeit, wenn man statt nur drei Körpern eine beliebige Zahl von Massen betrachtet, die sich nach dem NEWTON'schen Gesetz anziehen. Man hat in der That nur die Summationen in (7**), (9) und (12*) über sämmtliche Körper in dem System auszudehnen.

Nimmt man in unserem Planetensystem die Ekliptik zur XY-Ebene, so weiss man, dass die $\mathfrak{z}$-Coordinaten sämmtlicher grossen Planeten klein sind. Es folgt hieraus nach (12*), dass die Constanten c_1 und c_2 im Planetensystem kleine Werthe haben, und aus (20) findet man demnach, dass die Neigung γ der unveränderlichen Ebene gegen die Ekliptik klein sein muss. Um ihre Lage zu bestimmen, könnte man die Werthe der Coordinaten und der Geschwindigkeiten der Planeten für eine bestimmte Zeit in (12*) einsetzen und unter Berücksichtigung der Werthe der Massen die Constanten c_1, c_2 und c_3 berechnen. Diese Berechnung kann indessen einfacher ausgeführt werden, wie in einem der folgenden Paragraphen gezeigt wird.

Die Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene für unser Planetensystem ist zwar mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, da nämlich die Massen der Planeten nicht genau bekannt sind. Diese Ungenauigkeit ist indessen so unbeträchtlich, dass man mit für praktische Zwecke genügender Schärfe die Lage der unveränderlichen Ebene bestimmen kann, und wir werden im Folgenden finden, dass es gewisse Vortheile gewährt, die so bestimmte Ebene als XY-Ebene bei den Untersuchungen über die Bewegungen der Körper im Planetensystem zu benutzen.

§ 2. Bewegungsgleichungen für relative Coordinaten.

Mittelst der bekannten 10 allgemeinen Integrale des Problems der drei Körper — dem Integral der lebendigen Kraft, den sechs Schwerpunktsintegralen und den drei Flächenintegralen — kann man die Ordnungszahl der Differentialgleichungen der Bewegung von 18 bis 8 herunterdrücken. Es lassen sich also, durch

eine geeignete Wahl der Coordinaten, die Bewegungsgleichungen auf 4 Freiheitsgrade reduciren, und wir werden diese Reduction später thatsächlich durchführen.

Im allgemeinen wird indessen die Ordnungszahl der Differentialgleichungen auf dieses Minimum nicht gebracht.[1] In den meisten Fällen giebt man sich damit zufrieden, die 6 Schwerpunktsintegrale zu benutzen und mit ihrer Hilfe die Ordnungszahl von 18 auf 12 zu bringen.

Bezeichnen wir mit ξ_i die Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt, so dass

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_{1+3i} &= X_1 + \xi_{1+3i}, \\ x_{2+3i} &= X_2 + \xi_{2+3i}, \\ x_{3+3i} &= X_3 + \xi_{3+3i}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 0,\ 1,\ 2)$$

so ist nach § 1 (10)

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{2} m_{s+3i}\, \xi_{s+3i} = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3),$$

und also auch

$$\sum m_{s+3i} \frac{d\,\xi_{s+3i}}{d\,t} = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3),$$

oder

$$(3) \qquad \sum \eta_{s+3i} = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ 3),$$

wenn gesetzt wird

$$(3^*) \qquad \eta_i = m_i \frac{d\,\xi_i}{d\,t}.$$

Aus (1) erhält man nun nach (3*) und den Gleichungen (3) und (10**) im vorigen Paragraphen

$$(4) \qquad y_{s+3i} = \frac{m_{s+3i}}{M} Y_s + \eta_{s+3i} \quad (s = 1,\ 2,\ 3).$$

Wird dieser Werth in den Ausdruck der lebendigen Kraft § 1 (4) eingesetzt, so erhält man, unter Berücksichtigung von (3)

$$(4^*) \qquad T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{M} Y_i^2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\eta_i^2}{m_i}.$$

[1] Man kann sogar, wenn man die canonische Form aufgiebt, die Ordnungszahl auf 7 herunterdrücken. Vgl. § 10.

Setzt man also

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{\eta_i^2}{m_i} - V, \tag{5*}$$

so wird

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 9). \tag{5}$$

Man bekommt also, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt legt, Differentialgleichungen, welche von derselben Form sind, wie diejenigen, die für die absoluten Coordinaten gültig sind.

Es muss indessen bemerkt werden, das zwischen den neuen Coordinaten die Relationen (2) und (3) bestehen, so dass von den neun Coordinaten ξ_i nur 6 von einander unabhängig sind. Man kann also die Coordinaten ξ_i gegen sechs andere Coordinaten vertauschen. Gewöhnlich werden als solche die Coordinaten, bezogen auf eine von den Massen als Anfangspunkt, gewählt. Solche Coordinaten nennt man *relative Coordinaten.*

Nennen wir die drei Körper A, B und C und nehmen wir C als Anfangspunkt der Coordinaten, wobei ξ_7, ξ_8 und ξ_9 als Coordinaten von C in Bezug auf den Schwerpunkt angenommen werden, so sind die relativen Coordinaten

für A: $\xi_1 - \xi_7$, $\xi_2 - \xi_8$, $\xi_3 - \xi_9$;

„ B: $\xi_4 - \xi_7$, $\xi_5 - \xi_8$, $\xi_6 - \xi_9$.

Wenn diese relativen Coordinaten bestimmt sind, so sind auch die Werthe der Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt bekannt. Man hat nämlich nach (2)

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \xi_1 + m_4 \xi_4 + m_7 \xi_7 \\ &= m_1 (\xi_1 - \xi_7) + m_4 (\xi_4 - \xi_7) + M \xi_7, \end{aligned}$$

so dass man mittelst der Formeln

$$\left\{ \begin{aligned} -M\xi_7 &= m_1 (\xi_1 - \xi_7) + m_4 (\xi_4 - \xi_7), \\ -M\xi_8 &= m_2 (\xi_2 - \xi_8) + m_5 (\xi_5 - \xi_8), \\ -M\xi_9 &= m_3 (\xi_3 - \xi_9) + m_6 (\xi_6 - \xi_9) \end{aligned} \right. \tag{6}$$

die Coordinaten, bezogen auf den Schwerpunkt, aus den relativen Coordinaten berechnen kann.

Um die Differentialgleichungen für die relativen Coordinaten abzuleiten, gehen wir von den Gleichungen

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{d t} = \frac{\partial V}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 9), \tag{7}$$

welche mit (5) identisch sind, aus.

Werden die Massen von A, B und C mit m_a, m_b und m_c bezeichnet, so erhalten wir nun aus (7)

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} m_a \frac{d^2 (\xi_1 - \xi_7)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7}, \\ m_a \frac{d^2 (\xi_2 - \xi_8)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_2} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{d \xi_8}, \\ m_a \frac{d^2 (\xi_3 - \xi_9)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_3} - \frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_9}, \end{aligned} \right.$$

und

$$\tag{8*} \left\{ \begin{aligned} m_b \frac{d^2 (\xi_4 - \xi_7)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_4} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7}, \\ m_b \frac{d^2 (\xi_5 - \xi_8)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_5} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_8}, \\ m_b \frac{d^2 (\xi_6 - \xi_9)}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_6} - \frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_9}. \end{aligned} \right.$$

In den Gleichungen (8) und (8*) kommen offenbar *nur* die relativen Coordinaten vor, da die Abstände zwischen den Körpern und also auch V nur von diesen Coordinaten abhängen.

Diese Gleichungen können in canonische Form gebracht werden, indem man, nach den Auseinandersetzungen in I § 8,

$$q_1 = \xi_1 - \xi_7,$$
$$q_2 = \xi_2 - \xi_8$$

u. s. w. setzt, die lebendige Kraft T durch die Grössen q_i ausdrückt und die entsprechenden canonischen Coordinaten p_i durch die Gleichung

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

bestimmt, womit man hat

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Wir werden im nächsten Paragraphen diese canonischen relativen Coordinaten aufsuchen.

Gewöhnlich bedient man sich indessen nur relativer Coordinaten, die nicht canonisch sind. Setzt man

$$(9) \qquad \begin{cases} q_1 = \xi_1 - \xi_7, & q_4 = \xi_4 - \xi_7, \\ q_2 = \xi_2 - \xi_8, & q_5 = \xi_5 - \xi_8, \\ q_3 = \xi_3 - \xi_9, & q_6 = \xi_6 - \xi_9, \end{cases}$$

und combinirt mit diesen Coordinaten sechs Grössen p_i so bestimmt, dass

$$(10) \qquad p_i = m_i \frac{d q_i}{d t} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

so können die Differentialgleichungen für p_i und q_i zwar nicht in canonische Form gebracht werden. Dagegen können sie eine Form annehmen, welche eine gewisse Aehnlichkeit mit der canonischen Form hat, und deswegen von Poincaré halbcanonisch genannt wird.[1]

Wir haben nämlich

$$(11) \qquad V = \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} + \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}},$$

wo

$$(12) \qquad \begin{cases} r_{bc}^2 = (\xi_4 - \xi_7)^2 + (\xi_5 - \xi_8)^2 + (\xi_6 - \xi_9)^2, \\ r_{ca}^2 = (\xi_1 - \xi_7)^2 + (\xi_2 - \xi_8)^2 + (\xi_3 - \xi_9)^2, \\ r_{ab}^2 = (\xi_1 - \xi_4)^2 + (\xi_2 - \xi_5)^2 + (\xi_3 - \xi_6)^2, \end{cases}$$

welche Gleichungen auch in der Form

[1] Bulletin astronomique 1897.

$$(12^*)\qquad \begin{cases} r_{bc}^2 = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2, \\ r_{ca}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r_{ab}^2 = (q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2 \end{cases}$$

geschrieben werden können.

Um nun die in (8) und (8*) vorkommenden partiellen Differentialquotienten von V zu bilden, bemerken wir zuerst, dass

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

für $i = 1, 2, \ldots, 6$. Die Gleichungen (8) und (8*) sind also von der Form

$$(13)\qquad \begin{cases} m_a \dfrac{d^2 q_i}{d t^2} = \dfrac{\partial V}{\partial q_i} - \dfrac{m_a}{m_c} \dfrac{\partial V}{\partial \xi_{6+i}} & (i = 1, 2, 3), \\ m_b \dfrac{d^2 q_i}{d t^2} = \dfrac{\partial V}{\partial q_i} - \dfrac{m_b}{m_c} \dfrac{\partial V}{\partial \xi_{6+i}} & (i = 4, 5, 6). \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_b m_c (\xi_4 - \xi_7)}{r_{bc}^3} + \frac{k^2 m_c m_a (\xi_1 - \xi_7)}{r_{ca}^3},$$

also

$$\frac{m_a}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_a m_b q_4}{r_{bc}^3} + \frac{k^2 m_a^2 q_1}{r_{ca}^3},$$

und ebenso

$$\frac{m_b}{m_c} \frac{\partial V}{\partial \xi_7} = \frac{k^2 m_b m_a q_1}{r_{ac}^3} + \frac{k^2 m_b^2 q_4}{r_{cb}^3}.$$

Weiter hat man

$$\frac{\partial\, 1/r_{ca}}{\partial q_1} = -\frac{q_1}{r_{ca}^3}, \qquad \frac{\partial\, 1/r_{ca}}{\partial q_4} = 0,$$

$$\frac{\partial\, 1/r_{bc}}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial\, 1/r_{bc}}{\partial q_4} = -\frac{q_4}{r_{bc}^3}.$$

Setzt man also

$$(14)\qquad \begin{cases} V_1 = V + \dfrac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} + \dfrac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} - \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\ V_2 = V + \dfrac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} + \dfrac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} - \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{ac}^3}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \end{cases}$$

so bekommen die Gleichungen (13) die Form

$$(15)\quad \begin{cases} m_a \dfrac{d^2 q_i}{d t^2} = \dfrac{\partial V_1}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ m_b \dfrac{d^2 q_i}{d t^2} = \dfrac{\partial V_2}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6). \end{cases}$$

Will man nun die Grössen

$$p_i = m_i \frac{d q_i}{d t}$$

einführen, und setzt

$$(16)\quad \begin{cases} H_a = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{p_i^2}{m_i} - V - \dfrac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} - \dfrac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} + \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{bc}^3}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\ H_b = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=4}^{6} \dfrac{p_i^2}{m_i} - V - \dfrac{k^2 m_a^2}{r_{ac}} - \dfrac{k^2 m_b^2}{r_{bc}} + \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{ac}^3}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \end{cases}$$

so bekommt man die „halbcanonischen" Bewegungsgleichungen für relative Coordinaten

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6). \end{cases}$$

Jeder Körper in dem System bekommt hier seine eigene charakteristische Function. Es sind Differentialgleichungen von dieser Form, welche gewöhnlich den Untersuchungen in der sogenannten *Störungstheorie* zu Grunde gelegt werden. Dieselben besitzen für rechnerische Aufgaben gewisse Vorzüge, welche aber verloren gehen, wenn es sich um die *allgemeinen* Eigenschaften der Bewegungen handelt. Es ist dann vortheilhafter, sich canonischer Coordinaten zu bedienen.

§ 3. Canonische relative Coordinaten.

Um ein canonisches System von Coordinaten aufzustellen, wo die relativen Coordinaten als q-Coordinaten eingehen, hat man nach I § 8 die lebendige Kraft T durch die q-Coordinaten und ihre

Differentialquotienten auszudrücken, und man erhält dann die entsprechenden p-Coordinaten durch die Formel

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}. \tag{1}$$

Nun ist nach § 2 (4*)

$$2T = M\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dX_i}{dt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2.$$

Das erste Glied in diesem Ausdruck ist nach § 1 (10*) gleich einer Constante und braucht deswegen nicht berücksichtigt zu werden. Setzen wir also

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2, \tag{2}$$

so ist die Aufgabe zunächst, die rechte Seite dieser Gleichung durch die relativen Coordinaten auszudrücken.

Man hat nun

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= q_1 + \xi_7, & \xi_4 &= q_4 + \xi_7,\\
\xi_2 &= q_2 + \xi_8, & \xi_5 &= q_5 + \xi_8,\\
\xi_3 &= q_3 + \xi_9, & \xi_6 &= q_6 + \xi_9
\end{aligned}$$

und nach § 2 (6) ist

$$\left\{\begin{aligned}
-M\xi_7 &= m_1 q_1 + m_4 q_4,\\
-M\xi_8 &= m_2 q_2 + m_5 q_5,\\
-M\xi_9 &= m_3 q_3 + m_6 q_6.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Also wird

$$\left\{\begin{aligned}
M\xi_1 &= (m_b + m_c) q_1 - m_b q_4,\\
M\xi_2 &= (m_b + m_c) q_2 - m_b q_5,\\
M\xi_3 &= (m_b + m_c) q_3 - m_b q_6,\\
M\xi_4 &= -m_a q_1 + (m_a + m_c) q_4,\\
M\xi_5 &= -m_a q_2 + (m_a + m_c) q_5,\\
M\xi_6 &= -m_a q_3 + (m_a + m_c) q_6.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Durch (3) und (4) sind nun die Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt durch die relativen Coordinaten ausgedrückt. Aehnliche Formeln gelten für die Geschwindigkeiten ξ_i'. Hieraus erhält man

$$(5)\quad \begin{cases} T' = \frac{1}{2M}[m_a(m_b + m_c)(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2) \\ \qquad + m_b(m_a + m_c)(q_4'^2 + q_5'^2 + q_6'^2) \\ \qquad - 2\, m_a m_b (q_1' q_4' + q_2' q_5' + q_3' q_6')]\,. \end{cases}$$

Nach (1) bekommt man nun

$$(5^*)\quad \begin{cases} p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{1}{M}[m_a(m_b + m_c)\, q_1' - m_a m_b\, q_4'], \\ p_4 = \frac{\partial T}{\partial q_4'} = \frac{1}{M}[m_b(m_a + m_c)\, q_4' - m_a m_b\, q_1']\,. \end{cases}$$

Zieht man aber die Relationen (4) in Betracht, so können diese Gleichungen in der Form

$$(6^*)\qquad p_i = m_i\, \xi_i' \qquad (i = 1\,,\ 2\,,\ \ldots,\ 6)$$

geschrieben werden. *Die relativen Coordinaten und die absoluten Geschwindigkeiten mit der Masse multiplicirt bilden also zusammen ein System von canonischen Coordinaten für das Drei-Körperproblem.*[1]

Nach § 2 (2) hat man

$$m_7\, \xi_7 = -\, m_1\, \xi_1 - m_4\, \xi_4$$

und es ist folglich

$$(6^{**})\quad \begin{cases} \xi_7' = -\, \frac{1}{m_c}(p_1 + p_4)\,, \\ \xi_8' = -\, \frac{1}{m_c}(p_2 + p_5)\,, \\ \xi_9' = -\, \frac{1}{m_c}(p_3 + p_6)\,. \end{cases}$$

Man kann also die lebendige Kraft in der Form

[1] Poincaré: Bulletin astronomique 1897.

(6) $$T = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \left[\frac{p_1^2}{m_a} + \frac{p_4^2}{m_b} + \frac{(p_1 + p_4)^2}{m_c} \right]$$

schreiben, wenn das Zeichen $\mathfrak{S}$ bezeichnet, dass die Summation über die drei Coordinatenachsen ausgeführt werden soll. Wir können statt dessen auch die Form

(7) $$T' = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \left[\frac{p_1^2}{m_a'} + \frac{p_4^2}{m_b'} + \frac{2 p_1 p_4}{m_c'} \right]$$

wählen, wo gesetzt ist:

(7*) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{m_a'} &= \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_c}, \\ \frac{1}{m_b'} &= \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}, \\ \frac{1}{m_c'} &= \frac{1}{m_c}. \end{aligned} \right.$$

Die canonischen relativen Coordinaten, auf die Poincaré zuerst aufmerksam gemacht hat, sind wegen ihrer Einfachheit von grossem Interesse. Wir werden indessen in einem folgenden Paragraphen finden, dass sie mit einigen Unvollkommenheiten behaftet sind, welche man durch Anwendung der von Jacobi eingeführten canonischen Coordinaten vermeiden kann.

§ 4. Jacobi'sche canonische Coordinaten.

In seiner berühmten Abhandlung „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps“ hat Jacobi ein System von Coordinaten benutzt, bei welchem die Differentialgleichungen von canonischer Form werden, ohne dass die Form der lebendigen Kraft geändert wird. Sein Resultat ist von Allegret (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1875) für n Körper verallgemeinert worden. Der Gang dieser Untersuchung ist ungefähr der folgende.

Bezeichnen wir mit ξ_i, η_i, ζ_i die rechtwinkligen Coordinaten der Masse m_i, auf den Schwerpunkt des Systems als Anfangspunkt bezogen, so ist nach § 2 (4*), wenn wir von dem constanten Glied absehen,

(1) $$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right)$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

(2) $$\left\{\begin{aligned} m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_i}, \\ m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \eta_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \eta_i}. \end{aligned}\right.$$

Zwischen den Coordinaten bestehen die drei Gleichungen

(3) $$0 = \sum m_i \xi_i = \sum m_i \eta_i = \sum m_i \zeta_i.$$

Mittelst (3) können drei von den Coordinaten durch die übrigen ausgedrückt werden, und man kann also in verschiedener Weise die $3n$ Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i durch $3(n-1)$ neue Veränderliche ersetzen. Das Einfachste ist, dass man die Relation zwischen den neuen und den alten Coordinaten durch lineare Gleichungen ausgedrückt annimmt. Wir setzen nun

(4) $$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1}, \\ \xi_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,n-1}x_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}; \end{aligned}\right.$$

$$\eta_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}y_{n-1}$$

u. s. w.,

$$\zeta_1 = \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2 + \ldots + \alpha_{1,n-1}z_{n-1}$$

u. s. w.,

so dass $x_1, \ldots, x_{n-1}$; $y_1, \ldots, y_{n-1}$; $z_1, \ldots, z_{n-1}$ die neuen Coordinaten bezeichnen.

Zwischen den $n(n-1)$ Coefficienten α_{ij} können ebenso viele Relationen aufgestellt werden.

Die Schwerpunktsgleichungen (3) geben folgende $n-1$ Relationen:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum m_i \alpha_{i1} = 0, \\ \sum m_i \alpha_{i2} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum m_i \alpha_{i,\,n-1} = 0. \end{cases}$$

Stellen wir noch die Bedingung auf, dass die lebendige Kraft ihre Form (1) behalten soll, dass also, durch die neuen Coordinaten ausgedrückt, T folgende Form bekommt

$$(6)\qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

wo $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ constante Factoren bezeichnen, so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_{ir} \alpha_{is} = 0 \qquad (r\,s = 12,\ 13,\ \ldots,\ \widehat{n-2}\,\widehat{n-1}),$$

oder

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} \qquad \text{Relationen.}$$

Für die Coefficienten μ_i bekommt man den Werth

$$(8)\qquad \mu_i = \sum_{s=1}^{n} m_s \alpha_{si}^2 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Da nun

$$(9)\qquad \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \mu_i x_i',$$

so bilden x_i, y_i, z_i mit $\mu_i x_i'$, $\mu_i y_i'$, $\mu_i z_i'$ ein canonisches System von Coordinaten.

Wir haben den Coefficienten α_{ij}

$$n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Bedingungen auferlegt und wir haben also noch

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Bedingungen zu unserer Verfügung. Man kann sich dieser Willkürlichkeit bedienen, um den neuen Coordinaten eine einfache geometrische Bedeutung zu geben.

Es sei G_1 der Schwerpunkt der beiden Massen m_1 und m_2, G_2 der Schwerpunkt der drei Massen m_1, m_2 und m_3 u. s. w., so dass G_{n-1} den Schwerpunkt des ganzen Systems von n Körpern bezeichnet (Fig. 20).

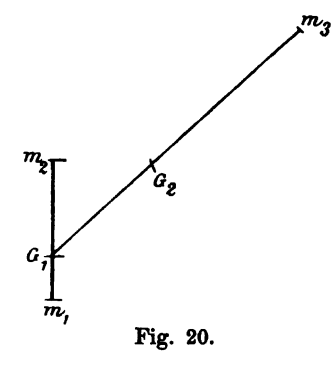


Fig. 20.

Es bedeuten weiter x_1, y_1, z_1 die Projectionen der Linie $m_1\,m_2$ auf die Coordinatenachsen; x_2, y_2, z_2 die Projectionen der Linie $G_1\,m_3$ u. s. w., so dass zuletzt x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1} die Projectionen der Linie $G_{n-2}\,m_n$ auf die Coordinatenachsen bezeichnen. Setzen wir nun

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\sigma_1 = m_1\,, \\
\sigma_2 = m_1 + m_2\,, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\sigma_s = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i,
\end{cases}
$$

so erhalten wir für die Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt die folgenden Ausdrücke

$$
(11)\qquad \begin{cases}
\xi_1 = -\dfrac{m_2}{\sigma_2}x_1 - \dfrac{m_3}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \dfrac{m_n}{\sigma_n}x_{n-1}\,, \\
\xi_2 = \quad \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}x_1 - \dfrac{m_3}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \dfrac{m_n}{\sigma_n}x_{n-1}\,, \\
\xi_3 = \qquad\qquad\quad \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}x_2 - \cdots - \dfrac{m_n}{\sigma_n}x_{n-1}\,, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\xi_{n-1} = \qquad\qquad \dfrac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}x_{n-2} - \dfrac{m_n}{\sigma_n}x_{n-1}\,, \\
\xi_n = \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}x_{n-1}\,.
\end{cases}
$$

Man findet nach einer kleinen Rechnung, dass die Bedingungsgleichungen (5) und (7) hier erfüllt sind. Für die Coefficienten μ_i bekommt man die Werthe:

$$\mu_1 = \sigma_1 \frac{m_2}{\sigma_2}, \quad \mu_2 = \sigma_2 \frac{m_3}{\sigma_3}, \quad \ldots \mu_{n-1} = \sigma_{n-1} \frac{m_n}{\sigma_n}. \tag{12}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Jacobi'schen Coordinaten sind nun

$$\left\{\begin{aligned} \mu_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 y_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{d y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \mu_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} &= \frac{\partial V}{\partial z_i}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

welche man auch in canonischer Form schreiben kann. Man setzt zu dem Zweck

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= q_{3i-2}, \\ y_i &= q_{3i-1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ z_i &= q_{3i}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} p_{3i-2} &= \mu_i q'_{3i-2}, \\ p_{3i-1} &= \mu_i q'_{3i-1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ p_{3i} &= \mu_i q'_{3i}, \end{aligned}\right. \tag{14*}$$

und erhält dann

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d q_i}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{d p_i}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{15}$$

wo

$$H = T - V,$$

oder

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} (p^2_{3i-2} + p^2_{3i-1} + p^2_{3i}) - \sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}}. \tag{16}$$

§ 5. Variation der Constanten. Canonische Elemente.

Wenn in dem Problem der n Körper eine der Massen sehr gross ist im Verhältnis zu den anderen, so ist der Einfluss der letzteren auf einander, wenigstens für kürzere Zeiten, verhältnissmässig klein, und man kann eine genäherte Auffassung der Bewegung erhalten — wohl bemerkt wenigstens für eine kurze Zeit —, wenn man nur die Anziehung der grossen Masse, im Folgenden kurzweg als die *Sonne* bezeichnet, auf die übrigen berücksichtigt und die Anziehung der kleinen Massen auf einander vorläufig ausser Acht lässt. Die Bahnen der kleinen Massen werden dann, in der ersten Annäherung, Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Will man nun auch die Anziehung der kleinen Körper auf einander, und auf die Sonne, in Betracht ziehen, so kann dies in der Weise geschehen, dass man die Elemente der Kegelschnitte, welche man in der ersten Annäherung erhielt, als *veränderlich* betrachtet, und die Veränderungen derselben so bestimmt, dass die wahre Bewegung der Körper wiedergegeben wird.

Allgemeiner aufgefasst können wir dies Princip, das von Lagrange in die Astronomie eingeführt worden ist und mit dem Namen *Methode der Variation der Constanten* bezeichnet wird, so ausdrücken, dass man, um die Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d q_i}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{d t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

zu integriren, zuerst einen Theil — H' — von der charakteristischen Function absondert und die Differentialgleichungen

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d q_i}{d t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \\ \frac{d p_i}{d t} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

integrirt. Man bekommt somit die Coordinaten q_i und p_i durch

die Zeit und $2(n-1)$ Integrationsconstanten — *Parameter* — ausgedrückt. Diese Bahn wird, nach GYLDÉN, die *intermediäre* Bahn genannt. Wenn man dann die Parameter dieser Bahn als veränderlich betrachtet, kann man für dieselben $2(n-1)$ Differentialgleichungen der ersten Ordnung ableiten, welche den allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) vollständig entsprechen.

Werden im Besonderen die Gleichungen (2) mittelst der HAMILTON-JACOBI'schen Methode integrirt, und die dabei auftretenden Integrationsconstanten als veränderliche Parameter betrachtet, so werden nach I § 10 die Differentialgleichungen für diese Parameter von canonischer Form, und können unmittelbar hingeschrieben werden. Die betreffenden Parameter werden *canonische Elemente* genannt.

Betrachten wir das Problem der drei Körper, und wählen wir als Coordinaten die JACOBI'schen Coordinaten von § 4, so ist

$$(3)\qquad H = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_a}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}},$$

wo nach § 4 (12)

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu_b = \dfrac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \\[2ex] \mu_a = \dfrac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}. \end{cases}$$

Fig. 21.

Werden die absoluten Coordinaten (oder die Coordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt) der Masse m_i mit ξ_i, η_i, ζ_i bezeichnet, und die absoluten Coordinaten des Schwerpunktes g der beiden Massen m_b und m_c mit ξ_g, η_g, ζ_g, so ist

$$(5)\qquad \begin{cases} q_1 = \xi_b - \xi_c, \quad q_2 = \eta_b - \eta_c, \quad q_3 = \zeta_b - \zeta_c; \\ q_4 = \xi_a - \xi_g, \quad q_5 = \eta_a - \eta_g, \quad q_6 = \zeta_a - \zeta_g; \end{cases}$$

so dass q_1, q_2, q_3 die relativen Coordinaten von m_b in Bezug auf

16*

m_c als Anfangspunkt, q_4, q_5, q_6 die relativen Coordinaten von m_a in Bezug auf g als Anfangspunkt sind.

Es ist also

$$(6)\quad \begin{cases} r^2_{bc} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \\ r^2_{ga} = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2. \end{cases}$$

Weiter ist

$$r^2_{ca} = r^2_{ga} + r^2_{gc} + 2 r_{ga} r_{gc} \cos\varphi,$$

$$r^2_{ab} = r^2_{ga} + r^2_{gb} - 2 r_{ga} r_{gb} \cos\varphi,$$

wo

$$\cos\varphi = \frac{q_1}{r_{bc}} \cdot \frac{q_4}{r_{ga}} + \frac{q_2}{r_{bc}} \cdot \frac{q_5}{r_{ga}} + \frac{q_3}{r_{bc}} \cdot \frac{q_6}{r_{ga}},$$

und ausserdem ist

$$(6^*)\quad \begin{cases} r_{gb} = \dfrac{m_c}{m_c + m_b} r_{bc}, \\[2ex] r_{gc} = \dfrac{m_b}{m_c + m_b} r_{bc}, \end{cases}$$

so dass

$$(6^{**})\quad \begin{cases} r^2_{ca} = \left(\dfrac{m_b}{m_c + m_b}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 \\[2ex] \qquad + \dfrac{2 m_b}{m_c + m_b} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \\[2ex] r^2_{ab} = \left(\dfrac{m_c}{m_c + m_b}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 \\[2ex] \qquad - \dfrac{2 m_c}{m_c + m_b} (q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6). \end{cases}$$

Ist eine von den Massen, z. B. m_c, sehr gross im Verhältniss zu den beiden anderen, so findet man, dass genähert

$$r^2_{ca} = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 = r^2_{ga},$$

und hierauf gründet man die Einführung der gewöhnlichen Form einer intermediären Bahn, der sogenannten KEPLER'schen Ellipse. Man setzt zu dem Zweck

$$(7)\quad H = H' + H'',$$

wo H' so gewählt wird, dass

$$(8)\quad \begin{cases} H' = \frac{1}{2\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu_a}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \\ \qquad - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} - \frac{k^2 m_a m_c}{\sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}}, \end{cases}$$

und also

$$(8^*)\qquad H'' = \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}.$$

Die intermediäre Bahn wird durch die Differentialgleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

bestimmt.

Diese Differentialgleichungen zerfallen von selbst in zwei getrennte Systeme. Das eine erhält man, indem der Index i die Werthe 1, 2, 3 annimmt, das andere für $i = 4, 5, 6$. Die Gleichungen zur Bestimmung von q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3 einerseits und andererseits von q_4, q_5, q_6; p_4, p_5, p_6 werden von derselben Form.

Betrachten wir die Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_i}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

wo

$$(10^*)\qquad H_b = \frac{1}{2\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}},$$

so kann nach I § 9 ihre Lösung aus der partiellen Differentialgleichung

$$(11)\qquad \frac{1}{2\mu_b}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right) = \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + h_1$$

abgeleitet werden. Ist nämlich W eine Function von q_1, q_2 und q_3, welche diese Gleichung befriedigt und welche ausser der Constanten h_1 zwei unabhängige Parameter h_2 und h_3 enthält, so hat man

$$(11^*)\quad \begin{cases} t + \gamma_1 = \dfrac{\partial W}{\partial h_1}, \\ \gamma_2 = \dfrac{\partial W}{\partial h_2}, \\ \gamma_3 = \dfrac{\partial W}{\partial h_3}, \end{cases}$$

wo γ_1, γ_2, γ_3 die neuen Integrationsconstanten bezeichnen. Ausserdem ist

$$(11^{**})\qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Wir setzen nun

$$(12)\qquad \beta_b^2 = k^2 m_b\, m_c\, \mu_b = \frac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c},$$

so dass die Gleichung (11) also lautet:

$$(12)\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right] = \frac{\beta_b^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu_b h_1 .$$

Die Integration dieser Gleichung haben wir in IV § 2 mit Hilfe des Theorems von Stäckel ausgeführt. Die gewöhnliche Methode, diese Integration auszuführen, ist die folgende.

Zuerst führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten ein, indem man setzt

$$(13)\quad \begin{cases} q_1 = r \cos\varphi \cos\theta, \\ q_2 = r \cos\varphi \sin\theta, \\ q_3 = r \sin\varphi, \end{cases}$$

wo $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ und erhält dann statt (12), indem wir β und μ statt β_b und μ_b schreiben,

$$(14)\quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] = \frac{\beta^2}{r} + \mu h_1 .$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = r^2\left[-\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1\right],$$

so findet man, dass man die Variabeln separiren kann, und schreiben

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\theta).$$

Bezeichnet man nämlich mit h_2 und h_3 zwei willkürliche Constanten, so können wir offenbar die folgenden drei Gleichungen ansetzen:

$$r^2\left[-\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1\right] = h_2^2,$$

$$\cos^2\varphi\left[-\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + h_2^2\right] = h_3^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = h_3^2,$$

so dass

$$(15)\quad \begin{cases} W_1 = \int\sqrt{\frac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr, \\ W_2 = \int\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi, \\ W_3 = h_3\theta. \end{cases}$$

Ich habe die Integrationsconstanten mit h_2^2 und h_3^2 bezeichnet, weil sie, wie in IV § 4 entwickelt wurde, nothwendigerweise positiv sein müssen. Die unteren Grenzen der Integrale können willkürlich gewählt werden.

Nach (11*) erhalten wir nun

$$(16)\quad \begin{cases} t + \gamma_1 = \mu\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{\sqrt{R}}, \\ \gamma_2 = -h_2\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{R}} + h_2\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}, \\ \gamma_3 = -h_3\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\Phi}} + \theta, \end{cases}$$

wo

$$(16^*)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{2\beta^2}{r} + 2\mu h_1 - \dfrac{h_2^2}{r^2}, \\ \Phi = h_2^2 - \dfrac{h_3^2}{\cos^2\varphi}. \end{cases}$$

Die intermediären Integrale lauten:

$$(16^{**})\qquad \begin{cases} \mu \dfrac{dr}{dt} = \sqrt{R}, \\ \mu r^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\Phi}, \\ \mu r^2 \cos^2\varphi \dfrac{d\theta}{dt} = h_3. \end{cases}$$

Wie in IV § 4 schliessen wir hieraus, dass r einen Minimalwerth $(r_2 = a(1-e))$ und einen Maximalmerth $(r_1 = a(1+e))$ haben muss und zwischen diesen Grenzen periodisch schwankt. Für die Länge der Periode erhält man den Werth

$$2T = 2\mu \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{R}},$$

oder, nach Ausführung der Integration,

$$(17)\qquad T = \frac{\mu a}{\sqrt{-2\mu h_1}}\pi = \frac{\mu a^{3/2}}{\beta}\pi.$$

Die *mittlere Bewegung* n bekommt also folgenden Werth

$$(17^*)\qquad n = \frac{\pi}{T} = \frac{\beta}{\mu a^{3/2}}.$$

Diejenigen Bahncurven, welche durch die Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

definirt sind, wo H' durch (8) gegeben ist, sind also Kegelschnitte — in denjenigen Fällen, die uns hier besonders interessiren, sind *diese* Kegelschnitte immer Ellipsen — und zwar wird m_b eine Ellipse beschreiben, in deren einem Brennpunkt die Masse m_c liegt, und m_a eine Ellipse, deren Focus im Schwerpunkt der beiden Massen m_b und m_c gelegen ist.

Vergleicht man die Gleichungen (16) mit den entsprechenden Gleichungen IV § 4 (21), so findet man, dass in den letzteren Gleichungen überall μ steht, wo in (16) β^2 vorkommt. Die Ausdrücke für die canonischen Elemente h_2, h_3 u. s. w. werden demnach leicht aus IV § 4 (23) abgeleitet, und man erhält

$$(18)\quad \begin{cases} h_1 = -\dfrac{\beta^2}{2\mu a}, & h_2 = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & h_3 = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \\ \gamma_1 = -t_\pi, & \gamma_2 = \pi - \Omega, & \gamma_3 = \Omega. \end{cases}$$

Der obige Werth für h_1 wird dadurch erhalten, dass man beachtet, dass die Summe der beiden Wurzeln, r_1 und r_2, der Gleichung

$$R = 0$$

gleich $2a$ sein soll, und andererseits ist

$$r_1 + r_2 = -\frac{\beta^2}{\mu h_1},$$

woraus der obige Werth hervorgeht.

Je nachdem es sich um die Bewegung der Masse A oder der Masse B handelt, bekommen nun die in (18) vorkommenden Constanten β und μ verschiedene Werthe. Es ist nämlich für

die Masse A:

$$(19)\quad \begin{cases} \mu_a = \dfrac{m_a(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}, \\ \beta_a^2 = k^2 m_a m_c \mu_a = \dfrac{k^2 m_a^2 m_c (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}, \end{cases}$$

und also

$$(19^*) \quad \begin{cases} h_{1a} = -\dfrac{k^2 m_a m_c}{2a}, \\[2ex] n_a = \sqrt{\dfrac{m_c(m_a + m_b + m_c)}{m_b + m_c}} \dfrac{k}{a^{3/2}}; \end{cases}$$

und *für die Masse B*:

$$(20) \quad \begin{cases} \mu_b = \dfrac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \\[2ex] \beta_b^2 = k^2 m_b m_c \mu_b = \dfrac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c} \end{cases}$$

und hieraus

$$(20^*) \quad \begin{cases} h_{1b} = -\dfrac{k^2 m_b m_c}{2a}, \\[2ex] n_b = \dfrac{k\sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}. \end{cases}$$

Die mittlere Bewegung des Körpers B ist also in dieser Annäherung von derselben Form, die man erhalten würde, wenn der Körper A nicht existirte.

Die elliptischen Bahnen, welche wir für die beiden Körper A und B gefunden haben, können wegen der Grösse der Masse C und der hieraus hervorgehenden Kleinheit der Differenz $H - H'$ bei constanten Werthen der Elemente als eine erste Annäherung an die wahren Bahnen benutzt werden, wenn es sich nur um eine kurze Zeit handelt. Werden aber die Elemente als *veränderlich* betrachtet, so können diese Veränderungen so bestimmt werden, dass die vollständigen Gleichungen (1) des Problems der drei Körper erfüllt werden. Wie in I § 10 gezeigt wurde, werden die Differentialgleichungen für diese veränderlichen Elemente sehr einfach, wenn man die bei der Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung auftretenden Constanten, welche aus diesem Grund canonische Elemente genannt wurden, als veränderliche Elemente einführt. Setzt man nämlich

$$(20) \quad \begin{cases} h_1 = h_{1b}, \quad h_2 = h_{2b}, \quad h_3 = h_{3b}; \\ \gamma_1 = \gamma_{1b}, \quad \gamma_2 = \gamma_{2b}, \quad \gamma_3 = \gamma_{3b} \end{cases}$$

und

$$(20^*)\quad \begin{cases} h_4 = h_{1a}, & h_5 = h_{2a}, & h_6 = h_{3a}, \\ \gamma_4 = \gamma_{1a}, & \gamma_5 = \gamma_{2a}, & \gamma_6 = \gamma_{3a}, \end{cases}$$

wo h_{1a}, h_{2a} u. s. w. die durch (18) bestimmten canonischen Elemente der Masse A; h_{1b}, h_{2b} u. s. w. die canonischen Elemente der Masse B bezeichnen, so sind nach I § 10 durch die Gleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d\gamma_i}{dt} = \dfrac{\partial H''}{\partial h_i}, \\ \dfrac{dh_i}{dt} = -\dfrac{\partial H''}{\partial \gamma_i}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

wo $H'' = H - H'$, die Veränderungen der Elemente h_i und γ_i gegeben, und zwar ersetzen diese Gleichungen vollständig die allgemeinen Gleichungen (1).

Werden die elliptischen Elemente des Körpers B mit a, e, i, t_π, π, Ω und die entsprechenden Elemente des Körpers A mit a', e', i', t'_π, π', Ω' bezeichnet, so sind die canonischen Elemente h_i und γ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ mit den elliptischen Elementen durch folgende Formeln verbunden:

$$(21^*)\quad \begin{cases} h_1 = -\dfrac{\beta^2}{2\mu a}, & h_2 = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & h_3 = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \\ \gamma_1 = -t_\pi, & \gamma_2 = \pi - \Omega, & \gamma_3 = \Omega \end{cases}$$

und

$$(21^{**})\quad \begin{cases} h_4 = -\dfrac{\beta'^2}{2\mu' a'}, & h_5 = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}, & h_6 = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i', \\ \gamma_4 = -t'_\pi, & \gamma_5 = \pi' - \Omega', & \gamma_6 = \Omega', \end{cases}$$

wo

$$(21^{***})\quad \begin{cases} \beta = \beta_b, & \mu = \mu_b, \\ \beta' = \beta_a, & \mu' = \mu_a \end{cases}$$

und β_b, μ_b u. s. w. durch die Formeln (19) und (20) bestimmt sind.

Wollte man die Differentialgleichungen der elliptischen Elemente der intermediären Bahn ableiten, so geschieht das leicht,

indem man den durch (21*) und (21**) bestimmten Zusammenhang zwischen den elliptischen und den canonischen Elementen berücksichtigt. Es ist indessen vortheilhafter, die canonischen Elemente zu behalten, eben weil die Differentialgleichungen für dieselben von canonischer Form sind.

Es ist indessen zweckmässig, zwei Paare der canonischen Elemente gegen andere zu vertauschen, die aber auch canonisch sind. Es sind dies die Elemente (h_1, γ_1) und (h_4, γ_4). Man hat nämlich

$$n = \frac{\beta}{\mu\, a^{3/2}},$$

$$a = -\frac{\beta^2}{2\mu h},$$

wo unter h hier entweder h_1 oder h_4 verstanden wird. Folglich hat man

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\beta^3}(-2h)^{3/2}.$$

Nun werden aber die Coordinaten der Körper A und B, wie in IV § 9 gezeigt wurde, periodische Functionen der Grösse $n(t+\gamma)$, und können nach den Cosinus und den Sinus dieses Winkels entwickelt werden. Es ist dann ersichtlich, dass in der Formel

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_i}$$

für $i = 1$ und $i = 4$ rechter Hand Glieder auftreten werden, welche mit der Zeit multiplicirt sind (da nämlich h_1 oder h_4 in n eingehen). Solche Glieder sind aber aus verschiedenen Gesichtspunkten unbequem und können in diesem Falle leicht vermieden werden. Schon Laplace und Lagrange haben aus diesem Grunde andere Elemente eingeführt, bei welchen diese Glieder nicht auftreten. Für die canonischen Differentialgleichungen (21) ist dieser Elementwechsel zuerst von Delaunay (Théorie du mouvement de la lune, I) ausgeführt worden.

Wir setzen nämlich

$$l = n(t + \gamma_1). \tag{22}$$

Betrachten wir nun die Gleichungen

$$\frac{d h_1}{d t} = -\frac{\partial H''}{\partial \gamma_1}, \quad \frac{d \gamma_1}{d t} = \frac{\partial H''}{\partial h_1},$$

so ist ja offenbar

$$\frac{\partial H''}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial H''}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \gamma_1} = n \frac{\partial H''}{\partial l}$$

und also

$$\frac{d h_1}{d t} = -n \frac{\partial H''}{\partial l}. \tag{23}$$

Weiter hat man

$$\frac{d l}{d t} = n\left(1 + \frac{d \gamma_1}{d t}\right) + (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{d h_1}{d t}. \tag{24}$$

Bezeichnen wir aber mit

$$\left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right)$$

den Differentialquotienten von H'' in Bezug auf h_1, *insofern* h_1 *in* n *nicht vorkommt*, so ist

$$\frac{\partial H''}{\partial h_1} = \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial H''}{\partial l} (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{d h_1}.$$

Da nun

$$\frac{d \gamma}{d t} = \frac{\partial H''}{\partial h_1},$$

so bekommt man aus (24)

$$\frac{d l}{d t} = n + n\left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right) + n \frac{\partial H''}{\partial l} (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} + (t + \gamma_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{d h_1}{d t},$$

oder nach (23)

$$\frac{d l}{d t} = n + n\left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right). \tag{25}$$

Durch (23) und (25) ist das Problem gelöst. Wir können aber durch Einführung einer Function

$$L = \beta \sqrt{a} \tag{26}$$

die Gleichungen etwas vereinfachen und gleichzeitig mehr symmetrische Formen gewinnen.

Es ist nun

$$L = \frac{\beta^2}{\sqrt{-2\mu h_1}},$$

oder

(24*) $$h_1 = -\frac{\beta^4}{2\mu L^2},$$

so dass

(27) $$n = \frac{\beta^4}{\mu L^3}.$$

Es ist also

$$-n\frac{dH''}{dl} = \frac{dh_1}{dt} = \frac{\beta^4}{\mu L^3}\frac{dL}{dt} = n\frac{dL}{dt},$$

und demnach

(28) $$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial l}.$$

Weiter hat man

$$\left(\frac{\partial H''}{\partial L}\right) = \left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right)\frac{\partial h_1}{\partial L} = n\left(\frac{\partial H''}{\partial h_1}\right),$$

so dass wir also statt (23) und (25) erhalten

(29) $$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\partial H''}{\partial l}, \\ \dfrac{dl}{dt} = n + \left(\dfrac{\partial H''}{\partial L}\right), \end{cases}$$

wo die Parenthese um $\frac{\partial H''}{\partial L}$ weggelassen werden kann, wenn man nur in Betracht zieht, dass die Differentiation in Bezug auf L, insofern diese Grösse *nicht* in n vorkommt, geschieht.

Die Gleichungen (29) können in canonischer Form geschrieben werden, wenn man die charakteristische Function etwas abändert.

Setzt man

(30) $$-\frac{\beta^4}{2\mu L^2} + H'' = -F,$$

in welchem Falle

$$-\frac{\partial F}{\partial L} = n + \frac{\partial H''}{\partial L},$$

so bekommt man nämlich statt (29) die Gleichungen

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}.$$

In derselben Weise werden die Elemente h_4 und γ_4 gegen neue canonische Elemente vertauscht.

Wir führen also eine charakteristische Function von folgender Form ein

$$F = \frac{\beta_a^4}{2\mu_a L'^2} + \frac{\beta_b^4}{2\mu_b L^2} - H''. \tag{31}$$

Bezeichnen wir nun die Elemente der Bahn von B mit L, G, H, l, g, h und die entsprechenden Elemente der Bahn des Körpers A mit L', G', H', l', g', h', so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$(32) \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial h}, \end{aligned} \right.$$

$$(32^*) \left\{ \begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(32^{**}) \left\{ \begin{aligned} L &= \beta\sqrt{a}, & l &= n(t+\gamma), \\ G &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \pi - \Omega \\ H &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega, \end{aligned} \right.$$

$$(32^{***})\quad \begin{cases} L' = \beta'\sqrt{a'}, & l' = n'(t+\gamma'), \\ G' = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}, & g' = \pi' - \Omega, \\ H' = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i', & h' = \Omega'. \end{cases}$$

Um alles beisammen zu haben, führe ich noch die Werthe von β und β' an. Es war

$$(33)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{k\, m_b\, m_c}{\sqrt{m_b + m_c}}, \\ \beta' = k\, m_a \sqrt{\dfrac{m_c(m_b+m_c)}{m_a+m_b+m_c}}. \end{cases}$$

Die mittleren Bewegungen sind durch die Formeln (19*) und (20*) gegeben.[1]

Für die in (32) und (32*) eingehende charakteristische Function F erhalten wir nach (3) und (8*) den folgenden Ausdruck:

$$(34)\quad F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}}.$$

Die Function F wird gewöhnlich *„Störungsfunction"* genannt. Die zwei ersten Glieder in obigem Ausdruck sind nach (33) und (4) von der „Ordnung der störenden Massen", die übrigen Glieder von der Ordnung des *Quadrates* der kleinen Massen m_a und m_b.

§ 6. Variation der Constanten bei relativen Coordinaten.

Kepler'sche Ellipsen können als intermediäre Bahnen bei den gewöhnlichen oder den canonischen relativen Coordinaten ebensowohl wie bei den Jacobi'schen Coordinaten benutzt werden. Die

[1] Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Elemente H und H' nicht mit den charakteristischen Functionen mit denselben Bezeichnungen verwechselt werden dürfen.

geometrische Bedeutung dieser Bahnen wird aber verschieden, obgleich der Unterschied zwischen ihnen immer von der Ordnung der störenden Massen ist. In formaler Hinsicht liegt der Unterschied in den verschiedenen Werthen der Constanten β und β' und der Function F. Das heisst, man kann die Formeln (32) und (32*) für die Elementenstörungen benutzen und braucht nur den in (32**) und (32***) eingehenden Constanten β und β' und der Störungsfunction F andere Werthe zu geben. Im Besonderen giebt es bei *gewöhnlichen* relativen Coordinaten für jeden Körper eine *besondere* Störungsfunction.

Betrachten wir zuerst die gewöhnlichen relativen Coordinaten. Nach § 2 (17) gelten für diese die halbcanonischen Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H_a}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H_b}{\partial q_i} \quad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

wo die Ausdrücke für H_a und H_b in § 2 (16) gegeben sind. Indem wir nun setzen

$$(2)\quad \begin{cases} H_a = H_a' + H_a'', \\ H_b = H_b' + H_b'', \end{cases}$$

wählen wir die Functionen H_a' und H_b' in solcher Weise, dass

$$(3)\quad \begin{cases} H_a' = \dfrac{1}{2m_a}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 - \dfrac{k^2 m_a(m_a + m_c)}{r_{ac}}, \\ H_b' = \dfrac{1}{2m_b}\sum_{i=4}^{6} p_i^2 - \dfrac{k^2 m_b(m_b + m_c)}{r_{bc}}, \end{cases}$$

wo

$$r^2_{ac} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.$$
$$r^2_{bc} = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2.$$

Um nun die Differentialgleichungen für die Kepler'schen Ellipsen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_a'}{\partial p_i}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_a'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_b'}{\partial p_i}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_b'}{\partial q_i} \quad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

zu integriren, wird man nach der Methode von HAMILTON und JACOBI zu einer partiellen Differentialgleichung von der folgenden Form geführt:

$$(5)\quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right\} = \frac{\beta^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu h_1,$$

einer Differentialgleichung also genau von der Form (14) im vorigen Paragraphen. Die Constanten β^2 und μ haben hier folgende Werthe:

Für die Masse A:

$$(6)\quad \begin{cases} \mu = m_a, \\ \beta^2 = k^2 m_a^2 (m_a + m_c). \end{cases}$$

Für die Masse B:

$$(6^*)\quad \begin{cases} \mu = m_b \\ \beta^2 = k^2 m_b^2 (m_b + m_c). \end{cases}$$

Die bei der Integration von (5) auftretenden canonischen Elemente werden durch die Formeln § 5 (21*) durch die elliptischen Elemente ausgedrückt, und führt man zuletzt die DELAUNAY'schen Elemente ein, so erhält man die Differentialgleichungen § 5 (32) und (32*).

Die Störungsfunction bekommt hier folgende Form:

Für die Masse A:

$$(7)\quad F_a = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r^3_{bc}}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6).$$

Für die Masse B:

$$(7^*)\quad F_b = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu L'^2} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r^3_{ac}}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6).$$

Für die mittleren Bewegungen hat man den Ausdruck § 5 (17*)

$$n = \frac{\beta}{\mu\, a^{3/2}} = \frac{\beta^4}{\mu\, L^3}$$

und also

$$(8)\qquad \begin{cases} n_a = \dfrac{k\sqrt{m_a + m_c}}{a^{3/2}}, \\[2ex] n_b = \dfrac{k\sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}. \end{cases}$$

Betrachtet man endlich die *canonischen* relativen Coordinaten, so hat man für diese nach § 3 für die charakteristische Function den Ausdruck

$$(9)\qquad H = \frac{1}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{p_1^2}{m_a'} + \frac{p_4^2}{m_b'} + \frac{2\,p_1\,p_4}{m_c'}\right) - V,$$

wo m_a', m_b', und m_c' durch § 3 (7*) gegeben sind. Die Kräftefunction V hat nach § 1 (1) die Form

$$(9^*)\qquad V = \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} + \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}.$$

Wir setzen nun

$$(10)\qquad H = H_a' + H_b' + H'',$$

wo

$$(10^*)\qquad \begin{cases} H_a' = \dfrac{1}{2}\mathfrak{S}\dfrac{p_1^2}{m_a'} - \dfrac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}}, \\[2ex] H_b' = \dfrac{1}{2}\mathfrak{S}\dfrac{p_4^2}{m_b'} - \dfrac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}}. \end{cases}$$

so dass

$$(10^{**})\qquad H'' = \mathfrak{S}\frac{p_1 p_4}{m_c'} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}.$$

Die KEPLER'schen Ellipsen werden demnach in diesem Falle durch die Differentialgleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_a'}{\partial p_i}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_a'}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\[2ex] \dfrac{d q_i}{d t} = \dfrac{\partial H_b'}{d t}, & \dfrac{d p_i}{d t} = -\dfrac{\partial H_b'}{\partial q_i} \quad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

bestimmt, und wir werden wieder zu der Betrachtung der partiellen Differentialgleichung

$$(11^*)\quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right\} = \frac{\beta^2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} + \mu h_1$$

geführt, wo nunmehr die Constanten β^2 und μ folgende Werthe haben:

Für die Masse A:

$$(12)\quad \begin{cases} \mu_a = m_a' = \dfrac{m_a m_c}{m_a + m_c}, \\[2ex] \beta_a^2 = k^2 m_a' m_a m_c = \dfrac{k^2 m_a^2 m_c^2}{m_a + m_c}. \end{cases}$$

Für die Masse B:

$$(12^*)\quad \begin{cases} \mu_b = \dfrac{m_b m_c}{m_b + m_c}, \\[2ex] \beta_b^2 = k^2 m_b' m_b m_c = \dfrac{k^2 m_b^2 m_c^2}{m_b + m_c}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen der DELAUNAY'schen Coordinaten nehmen die Form § 5 (32) und (32*) an, und die mittleren Bewegungen bekommen folgende Ausdrücke:

$$(13)\quad \begin{cases} n_a = \dfrac{k\sqrt{m_a + m_c}}{a^{3/2}}, \\[2ex] n_b = \dfrac{k\sqrt{m_b + m_c}}{a^{3/2}}, \end{cases}$$

genau wie in dem Falle, wo es sich um gewöhnliche relative Coordinaten handelte. Die KEPLER'schen Ellipsen sind aber in den beiden Fällen nicht identisch, wie aus den Werthen (6) und (12) für die

Constanten β und μ hervorgeht. Sie unterscheiden sich um Grössen von der Ordnung der störenden Massen. Wir werden in einem der folgenden Paragraphen Gelegenheit haben, den Unterschied zwischen den canonischen und den gewöhnlichen Coordinaten näher zu formulieren.

§ 7. Die Integrale der lebendigen Kraft und der Flächen unter Anwendung von verschiedenen Coordinaten.

Die Differentialgleichungen für die canonischen relativen Coordinaten und für die JACOBI'schen Coordinaten waren von der Form

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{1}$$

Da nun H in beiden Fällen die Zeit *explicite* nicht enthält und die charakteristische Function H also nur von den Coordinaten p_i und q_i selbst abhängig ist, so erhält man aus (1), indem man die Gleichungen mit $\frac{d p_i}{d t}$ und $-\frac{d q_i}{d t}$ multiplicirt und die Resultate addirt, das Integral

$$H = \text{Const.} \tag{2}$$

oder das Integral der lebendigen Kraft, welches nun also nach § 4 (16) und § 3 (7) die folgende Form hat:

In JACOBI'schen Coordinaten:

$$\frac{1}{2} \mathrm{S} \left(\frac{p_1^2}{m_a} + \frac{p_4^2}{m_b} \right) - V = h_1 . \tag{3}$$

In canonischen relativen Coordinaten:

$$\frac{1}{2} \mathrm{S} \left(\frac{p_1^2}{m_a'} + \frac{p_4^2}{m_b'} + \frac{2 p_1 p_4}{m_c'} \right) - V = h_1 , \tag{4}$$

wo die Summationen über die drei Coordinatenachsen ausgeführt werden müssen.

Für die JACOBI'schen Coordinaten hat man nach § 4 (14*)

$$p_1 = \mu_a q_1',$$
$$p_4 = \mu_b q_4',$$

so dass man also, statt (3), auch schreiben kann

$$(3^*)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Big[\mu_a\left(\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\right) + \\ + \mu_b\left(\left(\frac{dq_4}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_5}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_6}{dt}\right)^2\right)\Big] = V + h, \end{cases}$$

wonach *das Integral der lebendigen Kraft hier denselben Ausdruck hat wie bei absoluten Coordinaten*, nur dass die Massenfactoren hier einen anderen Werth haben.

Will man das Integral der lebendigen Kraft durch die gewöhnlichen relativen Coordinaten ausdrücken, so hat man in (4) die Ausdrücke § 3 (5*)

$$(5)\quad \begin{cases} Mp_1 = m_a(m_b + m_c)\,q_1' - m_a m_b\, q_4', \\ Mp_4 = \qquad - m_a m_b\, q_1' + m_b(m_a + m_c)\,q_4' \end{cases}$$

einzusetzen, wo

$$M = m_a + m_b + m_c,$$

und erhält dann statt (4)

$$(6)\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{1}{M}\Big[m_a(m_b+m_c)q_1'^2 + m_b(m_a+m_c)\,q_4'^2 - 2\,m_a m_b\, q_1'\, q_4'\Big] = V + h,$$

welche Form also das Integral der lebendigen Kraft, durch die relativen Coordinaten ausgedrückt, annimmt.

Gehen wir nun zu den *Integralen der Flächen* über, so lauten diese nach § 1 (12) in absoluten Coordinaten:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum(x_{2+3i}\,y_{3+3i} - x_{3+3i}\,y_{2+3i}) = c_1, \\ \sum(x_{3+3i}\,y_{1+3i} - x_{1+3i}\,y_{3+3i}) = c_2, \\ \sum(x_{1+3i}\,y_{2+3i} - x_{2+3i}\,y_{1+3i}) = c_3, \end{cases}$$

wo x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten der Masse A, x_4, x_5, x_6 diejenigen der Masse B und x_7, x_8, x_9 diejenigen der Masse C sind. Ausserdem ist

$$y_i = m_i \frac{d x_i}{d t}. \tag{7*}$$

Mittelst der Integrale des Schwerpunktes findet man, dass die Integrale (7) ihre Form behalten, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt gelegt wird, und wir können also die Integrale der Flächen in der Form

$$\text{(8)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum(\xi_{2+3i}\eta_{3+3i} - \xi_{3+3i}\eta_{2+3i}) = c_1', \\ &\sum(\xi_{3+3i}\eta_{1+3i} - \xi_{1+3i}\eta_{3+3i}) = c_2', \\ &\sum(\xi_{1+3i}\eta_{2+3i} - \xi_{2+3i}\eta_{1+3i}) = c_3', \end{aligned} \right.$$

ausdrücken, wo die Constanten rechter Hand im Allgemeinen von den Constanten c_1, c_2, c_3 verschieden sind.

Um zu den Ausdrücken für die Flächenintegrale durch *canonische relative* Coordinaten zu gelangen, hat man sich der Formeln § 3 (3), (4), (6*) und (6**) zu bedienen, welche geben, indem wir unter $q_1, \ldots, q_6$; $p_1, \ldots, p_6$ die canonischen Coordinaten verstehen:

$$\text{(9)} \quad \left\{ \begin{aligned} M\xi_1 &= \quad (m_b + m_c) q_1 - m_b q_4, \\ M\xi_4 &= - m_a q_1 + (m_a + m_c) q_4, \\ M\xi_7 &= - m_a q_1 - m_b q_4, \\ \eta_i &= \quad p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \\ \eta_7 &= - (p_1 + p_4), \\ \eta_8 &= - (p_2 + p_5), \\ \eta_9 &= - (p_3 + p_6). \end{aligned} \right.$$

Umgekehrt kann man diese Gleichungen in folgender Form schreiben:

$$\text{(9*)} \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 &= \xi_1 - \xi_7, \\ q_4 &= \xi_4 - \xi_7, \\ p_i &= \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt aber

$$\begin{aligned} & q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 = \\ & = (\xi_2 - \xi_9)\eta_3 - (\xi_3 - \xi_9)\eta_2 + (\xi_5 - \xi_8)\eta_6 - (\xi_6 - \xi_9)\eta_5 = \\ & = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 + \xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5 - \xi_8(\eta_3 + \eta_6) + \xi_9(\eta_2 + \eta_5) = \\ & = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 + \xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5 + \xi_8\eta_9 - \xi_9\eta_8 = c_1', \end{aligned}$$

und wir erhalten also für die Flächenintegrale die Ausdrücke:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 &= c_1', \\ q_3 p_4 - q_4 p_3 + q_6 p_1 - q_1 p_6 &= c_2', \\ q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_1 p_2 - q_2 p_1 &= c_3'. \end{aligned} \right.$$

Die Form der Flächenintegrale bleibt demnach bei einer Transformation von absoluten zu canonischen relativen Coordinaten unverändert.

Aehnliches gilt, wenn man die Transformation von JACOBI benutzt. Es wird nämlich, unter Anwendung dieser Coordinaten, nach § 4 (15)

$$(11) \qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

wo

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{p_i^2}{\mu_i} - V.$$

Da aber

$$p_i = \mu_i \frac{d q_i}{d t},$$

so kann man statt (11) auch schreiben

$$(11^*) \qquad \mu_i \frac{d^2 q_i}{d t^2} = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

und da V von einer Drehung des Coordinatensystems unabhängig ist, so bekommt man genau so, wie in § 1 bei den absoluten Coordinaten auseinandergesetzt wurde,

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} q_3 + \frac{\partial V}{\partial q_3} q_2 - \frac{\partial V}{\partial q_5} q_6 + \frac{\partial V}{\partial q_6} q_5 .$$

Setzen wir hier die Ausdrücke (11*) ein und führen die Integration aus, wobei zu bemerken ist, dass

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_b ,$$

$$\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_a .$$

so bekommt man also

$$(12) \quad \begin{cases} \mu_b\left(q_2 \frac{d q_3}{d t} - q_3 \frac{d q_2}{d t}\right) + \mu_a\left(q_5 \frac{d q_6}{d t} - q_6 \frac{d q_5}{d t}\right) = c_1'', \\ \mu_b\left(q_3 \frac{d q_1}{d t} - q_1 \frac{d q_3}{d t}\right) + \mu_a\left(q_6 \frac{d q_4}{d t} - q_4 \frac{d q_6}{d t}\right) = c_2'', \\ \mu_b\left(q_1 \frac{d q_2}{d t} - q_2 \frac{d q_1}{d t}\right) + \mu_a\left(q_4 \frac{d q_5}{d t} - q_5 \frac{d q_4}{d t}\right) = c_3'', \end{cases}$$

welche Gleichungen auch in der Form (10) geschrieben werden können.

Wenn die Integrale der Flächen bei irgend welchen Coordinaten die Form (12) annehmen, so sagt man, dass die Integrale der Flächen bei diesen Coordinaten *ihre Gültigkeit behalten.* Es ist ja selbstverständlich, dass bei einer beliebigen Wahl der Coordinaten immer Integrale existiren müssen, welche den Integralen der Flächen *entsprechen.* Wir werden aber später sehen, dass gerade die Form (12) für gewisse allgemeine Schlussfolgerungen, die für das Problem der drei Körper von Wichtigkeit sind, grosse Vortheile gewährt.

Werden *gewöhnliche* relative Coordinaten benutzt, so wird die Form der Flächenintegrale complicirter. Man kann sie aus (10) und (9) ableiten. Werden nämlich die beiden ersten Relationen (9) mit $m_1 (= m_a)$ und $m_4 (= m_b)$ multiplicirt und nimmt man auf die vierte Relation Rücksicht, so wird

$$(13) \quad \begin{cases} M p_1 = m_a(m_b + m_c) q_1' - m_a m_b q_4', \\ M p_4 = - m_a m_b q_1' + m_b (m_a + m_c) q_4', \end{cases}$$

und setzt man diese Relationen in (10) ein, so würde das erste Flächenintegral von folgender Form sein:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{m_n(m_b+m_c)}{M}(q_2 q_3' - q_3 q_2') + \dfrac{m_b(m_a+m_c)}{M}(q_5 q_6' - q_6 q_5') = \\ = c_1' + \dfrac{m_a m_b}{M}[q_2 q_6' - q_6 q_2' + q_5 q_3' - q_3 q_5']. \end{cases}$$

Die übrigen werden durch Permutation erhalten. Es ist zu bemerken, dass die Glieder rechter Seite (nach c_1') von der *zweiten* Ordnung der Massen sind.

§ 8. Ueber osculirende Elemente.

Wenn die Coordinaten und die Geschwindigkeiten eines Körpers durch gewisse *Parameter* ausgedrückt werden, indem man setzt

$$(1)\quad \begin{cases} q_i = \varphi_i(t;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \dfrac{d q_i}{d t} = \psi_i(t;\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Parameter oder *Bahnelemente* sind, so kann es vorkommen, dass die Functionen φ_i und ψ_i so beschaffen sind, dass

$$(2)\qquad \psi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t},$$

oder

$$(2^*)\qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial q_i}{\partial t},$$

so dass die Differentialquotienten der Coordinaten q_i in derselben Weise berechnet werden, als ob die Elemente unveränderlich wären.

In diesem Falle werden die Elemente *osculirende* genannt, weil die intermediäre Curve in jedem Augenblick die wahre Bahn berührt.

Diejenigen Elemente, welche man bei den JACOBI'schen Coordinaten oder bei den gewöhnlichen relativen Coordinaten als veränderliche Grössen einführt, sind osculirend. Dagegen ist dies nicht mit den bei den canonischen relativen Coordinaten eingeführten Elementen der Fall.

Wir nehmen an, dass die Coordinaten in der intermediären Bahn (q_i) und (p_i) $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und die entsprechenden Coordinaten in der wahren Bahn p_i und q_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ sind. Dann hat man nach dem Princip der Variation der Constanten

$$(3) \qquad \begin{cases} p_i = (p_i) \\ q_i = (q_i) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Die intermediären Bahnen, welche wir in den beiden vorigen Paragraphen betrachtet haben, sind sämmtlich durch Differentialgleichungen von der folgenden Form bestimmt

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(q_i)}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial (p_i)}, & \dfrac{d(p_i)}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial (q_i)} \qquad (i = 1, 2, 3), \\[2ex] \dfrac{d(q_i)}{dt} = \dfrac{\partial H_2}{\partial (p_i)}, & \dfrac{d(p_i)}{dt} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial (q_i)} \qquad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

wo

$$(4^*) \qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2}{2\nu_1} + \Phi_1\left((q_1), (q_2), (q_3)\right), \\[2ex] H_2 = \dfrac{(p_4)^2 + (p_5)^2 + (p_6)^2}{2\nu_2} + \Phi_2\left((q_4), (q_5), (q_6)\right). \end{cases}$$

Hier bezeichnen ν_1 und ν_2 Grössen, die nur von den Massen abhängen, und die bei den verschiedenen Coordinaten verschiedene Werthe haben.

Aus (4) und (4*) folgt nun, dass für $i = 1, 2, 3$

$$(5) \qquad (p_i) = \nu_1 \frac{d(q_i)}{dt},$$

und für $i = 4, 5, 6$

$$(5^*) \qquad (p_i) = \nu_2 \frac{d(q_i)}{dt}.$$

Betrachten wir nun die wahren Bahnen, so ist für diese bei den *gewöhnlichen* relativen Coordinaten und bei den JACOBI-schen Coordinaten, nach §§ 6 und 7,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} p_i = \nu_1 \dfrac{d q_i}{d t} & (i = 1, 2, 3), \\ p_i = \nu_2 \dfrac{d q_i}{d t} & (i = 1, 2, 3). \end{array}\right.$$

Bei diesen Coordinaten hat man also immer nach (3)

$$(7)\qquad \frac{d q_i}{d t} = \frac{d (q_i)}{d t},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial q_i}{\partial t}.$$

Die intermediären Bahnen sind also in diesem Falle immer osculirend.

Bei den *canonischen relativen* Coordinaten liegt aber die Sache anders. Nach § 7 (13) ist nämlich hier

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{m_a (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} q_1' - \dfrac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} q_4', \\ p_4 = - \dfrac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} q_1' + \dfrac{m_b (m_a + m_c)}{m_a + m_b + m_c} q_4', \end{array}\right.$$

wogegen die Relationen (5) und (5*) lauten

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} (p_1) = \dfrac{m_a m_c}{m_a + m_c} (q_1') = \dfrac{m_a m_c}{m_a + m_c} \dfrac{\partial q_1}{\partial t}, \\ (p_4) = \dfrac{m_b m_c}{m_b + m_c} (q_4') = \dfrac{m_b m_c}{m_b + m_c} \dfrac{\partial q_4}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Es wird also nach (3)

$$\frac{m_a (m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \frac{d q_1}{d t} - \frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \frac{d q_4}{d t} = \frac{m_a m_c}{m_a + m_c} \frac{\partial q_1}{\partial t},$$

$$- \frac{m_a m_b}{m_a + m_b + m_c} \frac{d q_1}{d t} + \frac{m_b (m_a + m_c)}{m_a + m_b + m_c} \frac{d q_4}{d t} = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} \frac{\partial q_4}{\partial t},$$

und somit

$$
(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d q_1}{d t} = \dfrac{\partial q_1}{\partial t} + \dfrac{m_b}{m_b + m_c} \dfrac{\partial q_4}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{d q_4}{d t} = \dfrac{\partial q_4}{\partial t} + \dfrac{m_a}{m_a + m_c} \dfrac{\partial q_1}{\partial t}. \end{cases}
$$

Die Geschwindigkeit in der intermediären Bahn und diejenige in der wahren Bahn stimmen also nicht mit einander überein. *Die Elemente, die man bei diesen Coordinaten einführt, sind also nicht osculirend.* [1]

Der Unterschied zwischen den Componenten der wahren und der intermediären Geschwindigkeiten ist nach (10) von der Ordnung der störenden Masse. Er kann nur dann bedeutend werden, wenn die Geschwindigkeiten sehr gross werden, was eintreffen kann, wenn zwei von den Massen einander sehr nahe kommen.

Dieser Uebelstand der canonischen relativen Coordinaten, dass bei ihrer Anwendung die Elemente nicht osculirend werden, ist zwar nicht, vom theoretischen Gesichtspunkte betrachtet, von grosser Bedeutung. Vom Standpunkte der numerischen Rechnung gewähren die osculirenden Elemente indessen gewisse Vortheile und die Coordinaten von JACOBI sind deswegen den canonischen relativen Coordinaten vorzuziehen.

§ 9. Elimination der Knoten. Stabilitätsbeweise von LAPLACE.

Aus den Flächenintegralen des Problems der drei Körper lassen sich einige wichtige Folgerungen ziehen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Wir bezeichnen die JACOBI'schen Coordinaten der Masse B mit q_1, q_2, q_3, und diejenigen der Masse A mit q_4, q_5, q_6. Der Anfangspunkt der Coordinaten liegt bei den vorigen in der Masse C, bei den letzteren in dem Schwerpunkt der Massen C und B. Setzt man

---

[1] Siehe POINCARÉ: Bulletin astr. 1897. S. 66.

$$(1)\qquad \begin{cases} p_i = \mu_b q_i & (i = 1, 2, 3), \\ p_i = \mu_a q_i & (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

so hat man für die intermediären Bahnen die Differentialgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, & \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H_a}{\partial p_i}, & \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} \quad (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

wo nach § 5 (10*)

$$(2^*)\qquad \begin{cases} H_b = \frac{1}{\mu_b}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \\ H_a = \frac{1}{\mu_a}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_a m_c}{\sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}}. \end{cases}$$

Nach (1) können wir diese Gleichungen auch in der Form

$$(3)\qquad \begin{cases} \mu_b \frac{d^2 q_i}{d t^2} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} & (i = 1, 2, 3), \\ \mu_a \frac{d^2 q_i}{d t^2} = -\frac{\partial H_a}{\partial q_i} & (i = 4, 5, 6) \end{cases}$$

schreiben.

Hieraus bekommt man wie in § 1 die Flächenintegrale für die intermediäre Bahn von B

$$(4)\qquad \begin{cases} \mu_b\left(q_2 \frac{d q_3}{d t} - q_3 \frac{d q_2}{d t}\right) = c_1, \\ \mu_b\left(q_3 \frac{d q_1}{d t} - q_1 \frac{d q_3}{d t}\right) = c_2, \\ \mu_b\left(q_1 \frac{d q_2}{d t} - q_2 \frac{d q_1}{d t}\right) = c_3 \end{cases}$$

und ähnliche Ausdrücke für den Körper A.

Die intermediäre Bewegung jedes Körpers geschieht in einer Ebene, deren Richtung durch die Formeln IV § 1 (5) bestimmt ist. Wird die Neigung dieser Ebene mit i, die Länge des aufsteigenden

Knotens derselben auf der XY-Ebene mit Ω bezeichnet, so hat man

$$
(5) \qquad \begin{cases} c_1 = c \sin i \sin \Omega, \\ c_2 = - c \sin i \cos \Omega, \\ c_3 = c \cos i, \end{cases}
$$

wo

$$
c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.
$$

Für die Masse A gelten ähnliche Gleichungen, welche wir in folgender Form schreiben

$$
(6) \qquad \begin{cases} c_1' = c' \sin i' \sin \Omega', \\ c_2' = - c' \sin i' \cos \Omega', \\ c_3' = c' \cos i'. \end{cases}
$$

Wird die XY-Ebene in die Bahnebene des Körpers B gelegt, so erhält man

$$
(7) \qquad \mu_b \left(q_1 \frac{d q_2}{d t} - q_2 \frac{d q_1}{d t} \right) = c
$$

oder wenn die Polarcoordinaten von § 5 eingeführt werden

$$
(8) \qquad \mu_b r^2 \frac{d v}{d t} = c,
$$

wo v die Länge in der Bahn bezeichnet. Nun ist aber nach § 5 (16^{**})

$$
(8^*) \qquad \mu_b r^2 \cos^2 \varphi \frac{d \theta}{d t} = h_3 = h_2 \cos i.
$$

Wird die XY-Ebene in die Bahnebene von B gelegt, so ist $\varphi = i = 0$, und die Gleichung (8^*) lautet also

$$
(8^{**}) \qquad \mu_b r^2 \frac{d \theta}{d t} = h_2,
$$

wo nunmehr $\theta = v$. Vergleichen wir (8) und (8^{**}), so wird also

$$c = h_2 = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, \tag{9}$$

wo β wie in § 5 definirt wird.

Setzen wir nun diesen Ausdruck in (5) und (4) ein, so nehmen nunmehr die Flächenintegrale folgende Form an:

$$(10)\quad \begin{cases} \mu_b\left(q_2\frac{dq_3}{dt} - q_3\frac{dq_2}{dt}\right) = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i\sin\Omega, \\ \mu_b\left(q_3\frac{dq_1}{dt} - q_1\frac{dq_3}{dt}\right) = -\beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i\cos\Omega, \\ \mu_b\left(q_1\frac{dq_2}{dt} - q_2\frac{dq_1}{dt}\right) = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i. \end{cases}$$

Für den Körper A bekommt man die ähnlichen Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} \mu_a\left(q_5\frac{dq_6}{dt} - q_6\frac{dq_5}{dt}\right) = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\sin\Omega', \\ \mu_a\left(q_6\frac{dq_4}{dt} - q_4\frac{dq_6}{dt}\right) = -\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\cos\Omega', \\ \mu_a\left(q_4\frac{dq_5}{dt} - q_5\frac{dq_4}{dt}\right) = \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i'. \end{cases}$$

Gehen wir nun zu den wahren Bahnen über und bezeichnen auch hier die Coordinaten von B mit q_1, q_2, q_3, und diejenigen von A mit q_4, q_5, q_6, so gelten für diese nach § 7 (12) die Flächenintegrale

$$(12)\quad \begin{cases} \mu_b\left(q_2\frac{dq_3}{dt} - q_3\frac{dq_2}{dt}\right) + \mu_a\left(q_5\frac{dq_6}{dt} - q_6\frac{dq_5}{dt}\right) = c''_1, \\ \mu_b\left(q_3\frac{dq_1}{dt} - q_1\frac{dq_3}{dt}\right) + \mu_a\left(q_6\frac{dq_4}{dt} - q_4\frac{dq_6}{dt}\right) = c_2'', \\ \mu_b\left(q_1\frac{dq_2}{dt} - q_2\frac{dq_1}{dt}\right) + \mu_a\left(q_4\frac{dq_5}{dt} - q_5\frac{dq_4}{dt}\right) = c_3''. \end{cases}$$

Nun wissen wir aber, dass die intermediären Bahnen von B und A in diesem Falle osculirende Bahnen sind.[1] Die Coordinaten

[1] Es ist nicht nothwendig für diesen Schluss, dass die Bahnen osculiren; es genügt in der That, dass die Form § 7 (10) für die Flächenintegrale gültig ist.

und die Geschwindigkeit lassen sich also in derselben Weise durch die Zeit und die Elemente ausdrücken, ob es sich um die intermediären oder die wahren Bahnen handelt. Wir können also die intermediären Ausdrücke (10) und (11) in (12) einführen und folglich werden die Flächenintegrale in folgender Weise durch die osculirenden Elemente ausgedrückt:

$$(13)\quad \begin{cases} \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \sin\Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\sin\Omega' = \quad c_1'', \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos\Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\cos\Omega' = -c_2'', \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i \qquad\qquad + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i' \qquad\quad = \quad c_3''. \end{cases}$$

Mittelst dieser Integrale können im Probleme der drei Körper der Halbparameter $(= a(1-e^2))$, die Neigung und die Knotenlänge für die eine Ellipse berechnet werden, wenn die entsprechenden Grössen für die andere Ellipse bekannt sind.

Diese Gleichungen erlauben eine einfache geometrische Deutung, wenn man die unveränderliche Ebene als XY-Ebene wählt. Es ist nämlich dann $c_1'' = c_2'' = 0$, so dass, wenn die dritte Constante mit C bezeichnet wird, die Gleichungen (13) nunmehr lauten:

$$(14)\quad \begin{cases} \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \sin\Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\sin\Omega' = 0, \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos\Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i'\cos\Omega' = 0, \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i \qquad\qquad + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \qquad\quad = C. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man nun

$$(15)\qquad \operatorname{tg}\Omega = \operatorname{tg}\Omega',$$

und man muss also entweder haben $\Omega = \Omega'$ oder $\Omega = \Omega' + 180^0$. Im ersteren Falle würden aber die beiden Glieder in den beiden ersten Gleichungen dasselbe Zeichen bekommen und ihre Summe könnte dann nicht gleich Null werden. Es ist also

$$(16)\qquad \Omega = \Omega' + 180.$$

Der aufsteigende Knoten der einen Planetenbahn auf der unveränderlichen Ebene fällt also mit dem absteigenden Knoten der anderen Bahn zusammen.

Diese elegante Formulirung der Flächenintegrale ist zuerst von JACOBI entdeckt worden („Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps").

Wird der Halbparameter der osculirenden Ellipsen mit p bezeichnet, so dass

$$p = a(1 - e^2), \quad p' = a'(1 - e'^2),$$

so können wir statt (14) schreiben

$$(14^*) \quad \begin{cases} \Omega = \Omega' + 180^\circ, \\ \beta\sqrt{p}\sin i = \beta'\sqrt{p'}\sin i', \\ \beta\sqrt{p}\cos i + \beta'\sqrt{p'}\cos i' = C. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können Ω, i und p berechnet werden, wenn Ω', i' und p' gegeben sind.

Das dritte Flächenintegral enthält einen der wichtigsten Sätze in der Mechanik des Himmels, nämlich den berühmten *Stabilitätsbeweis von LAPLACE.*

Durch verschiedene Untersuchungen von LAPLACE und LAGRANGE, auf welche wir in einem der folgenden Abschnitte zurückkommen, wurde gezeigt, dass, *wenigstens wenn man nur die Glieder von der niedrigsten Ordnung in Bezug auf die Massen berücksichtigt*, die halben grossen Achsen, a und a', der osculirenden Ellipsen nur periodischen Schwankungen um einen mittleren Werth, a_0 und a_0', unterliegen. Diesen Satz, welcher den ersten Theil des Stabilitätsbeweises von LAPLACE bildet, wollen wir hier vorläufig als bewiesen annehmen.

Sehen wir nun von diesen periodischen Schwankungen in a und a' ab, und ersetzen diese Grössen in der dritten Gleichung (14) durch ihre mittleren Werthe, so ist also

$$(14^{**}) \quad \beta\sqrt{a_0(1 - e^2)}\cos i + \beta'\sqrt{a_0'(1 - e'^2)}\cos i' = C.$$

Werden die mittleren Bewegungen mit n_0 und n_0' bezeichnet, so ist nach § 5 (17*)

$$n_0 = \frac{\beta}{\mu a_0^{3/2}},$$

so dass man statt (16) auch schreiben kann:

$$\mu n_0 a_0^2 \sqrt{1-e^2} \cos i + \mu' n_0' a_0'^2 \sqrt{1-e'^2} \cos i' = C. \tag{17}$$

Da a_0 (und somit auch n_0) und a_0' als unveränderlich angenommen werden, hat man auch

$$\mu n_0 a_0^2 + \mu' n_0' a_0'^2 = \text{Const.}$$

und also

$$\mu n_0 a_0^2 (1 - \sqrt{1-e^2} \cos i) + \mu' n_0' a_0'^2 (1 - \sqrt{1-e'^2} \cos i') = C',$$

wo C' eine neue Constante bezeichnet.

Diese Gleichung können wir in folgender Form schreiben:

$$\mu n_0 a_0^2 \frac{e^2 \cos^2 i + \sin^2 i}{1+\sqrt{1-e^2} \cos i} + \mu n_0' a_0'^2 \frac{e'^2 \cos^2 i' + \sin^2 i'}{1+\sqrt{1-e'^2} \cos i'} = C'. \tag{18}$$

Nun nehmen wir an, dass zu einer gewissen Zeit die Excentricitäten und die Neigungen klein sind. Berechnet man aber aus (18) den Werth der Constante C' aus den Werthen von e und i für die betreffende Zeit, so findet man, dass C' *selbst klein sein muss.* Da diese Grösse aber eine Constante ist, so muss somit die linke Seite von (18) immer klein bleiben. Nehmen wir endlich an, dass die Factoren $\mu n_0 a_0^2$ und $\mu' n_0' a_0'^2$ (oder was dasselbe ist, die Zahlen $\beta \sqrt{a_0}$ und $\beta' \sqrt{a_0'}$) von *derselben Grössenordnung* sind, so folgt also aus (18), dass *die Excentricitäten und die Neigungen für jeden Werth der Zeit kleine Werthe haben müssen.*

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Theorems waren also:

1) dass die halben grossen Achsen, a und a', nur kleinen Schwankungen unterliegen;
2) dass $\beta \sqrt{a}$ und $\beta' \sqrt{a'}$ von derselben Grössenordnung sind.

Die letztere Bedingung ist für jeden vorliegenden Fall, wenn nur die erste Bedingung erfüllt ist, leicht zu untersuchen.

Was die erste Bedingung betrifft, so ist die Erfüllung derselben nur für die erste Potenz der Massen bewiesen und es scheint mir aus verschiedenen Gründen sehr wahrscheinlich, dass sie in aller Strenge auch nicht näherungsweise erfüllt ist, wenn es sich um die Bewegung für eine unbeschränkte Zeit handelt. Es verdient indessen hier untersucht zu werden, was man in dieser Hinsicht aus den Flächenintegralen selbst schliessen kann.

Nimmt man an, dass die Bewegung *in einer Ebene* stattfindet, so findet man aus (14*) für $i = 0$

$$\beta\sqrt{p} + \beta'\sqrt{p'} = c. \tag{19}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Parameter p oder p' nicht über alle Grenzen wachsen können. Der *Maximalwerth* dieser Grössen ist in der That durch die Gleichungen

$$\sqrt{p} = \frac{c}{\beta},$$

und

$$\sqrt{p'} = \frac{c}{\beta'}$$

bestimmt.

Andererseits ist es mit (19) sehr wohl vereinbar, dass *p und p' beliebig kleine* Werthe annehmen können. Dies würde voraussetzen, dass *entweder* e beliebig nahe der Einheit käme, *oder* dass a beliebig kleine Werthe annähme.

In der vorhergehenden Auseinandersetzung habe ich stillschweigend vorausgesetzt, dass die beiden Glieder in (18) *dasselbe Vorzeichen* haben. Dies ist der Fall, wenn n und n' beide positiv oder beide negativ sind, d. h. wenn die beiden Körper A und B sich in derselben Richtung um den Anfangspunkt der Coordinaten bewegen. Diese Voraussetzung trifft bekanntlich für unser Planetensystem zu. Wenn ein oder mehrere Körper sich in umgekehrter

Richtung bewegen wie die übrigen, so verliert, wie LAPLACE hervorgehoben hat, der Beweis seine Gültigkeit.

Der LAPLACE'sche Stabilitätsbeweis behält unverändert seine Gültigkeit, wenn es sich um eine beliebige Zahl von Körpern handelt. Man bekommt in der That statt (18)

$$\sum \mu n a^2 \frac{e^2 \cos^2 i + \sin^2 i}{1 + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 i}} = C'. \tag{20}$$

und wenn sämmtliche Körper sich in derselben Richtung bewegen, so haben alle Glieder linker Hand hier gleiches Vorzeichen. Da nun die Summe aller Glieder klein ist, wie aus der Erfahrung für unser Planetensystem folgt, so muss *jedes Glied* auch immer klein sein. Die Excentricitäten und die Neigungen müssen also für die Planeten in unserem System klein bleiben, vorausgesetzt, dass a constant oder nahe constant ist. Dieser Schluss kann nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn entweder $n a^2$ klein ist, also für Planeten, die *sehr* nahe an der Sonne gelegen sind, oder wenn μ verhältnismässig sehr klein ist. Aus der letzteren Bemerkung folgt, dass der Stabilitätsbeweis von LAPLACE für die sogen. *kleinen Planeten* seine Gültigkeit verliert, bei welchen also, so weit aus den Flächenintegralen gefolgert werden kann, die Neigungen und die Excentricitäten (beliebig) grosse Werthe annehmen können.

Die osculirenden Ellipsen, welche hier betrachtet worden sind, sind sämmtlich aus den canonischen Coordinaten von JACOBI hervorgegangen. Würde man *gewöhnliche relative* Coordinaten benutzen und die bei denselben auftretenden osculirenden Elemente einführen, so würden die Integrale der Flächen, wie in § 7 gezeigt wurde, nicht eine so einfache Gestalt annehmen, und die Schlüsse von LAPLACE behalten demnach bei diesen Elementen nicht ihre Gültigkeit. Wie aus § 7 (14) hervorgeht, kann man indessen, *wenn die Glieder zweiter Ordnung der Massen vernachlässigt werden*, auch bei den gewöhnlichen relativen Coordinaten die Form (12) für die Flächenintegrale beibehalten, und man erhält dann diese Integrale in der Form

$$(21)\quad \begin{cases} \sum m\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \sin \Omega = c_1\,, \\ \sum m\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos \Omega = c_2\,, \\ \sum m\sqrt{a(1-e_2)}\cos i \qquad = c_3\,. \end{cases}$$

In der Astronomie werden gewöhnlich nur relative Coordinaten und die aus ihnen hervorgehenden osculirenden Ellipsen benutzt. Aus (21) findet man, dass die Schlüsse von LAPLACE in Bezug auf die Stabilität unseres Planetensystems auch für diese Elemente gelten, aber nur bis zu der ersten Potenz der Massen (inclusive). Die *vollständigen* Ausdrücke für die Flächenintegrale durch die gewöhnlichen osculirenden Elemente lassen sich, jedoch wie es scheint etwas umständlich, aus § 7 (14) ableiten.

Indem wir wieder zu den JACOBI'schen Coordinaten zurückkehren, wollen wir für diese die Ausdrücke der Flächenintegrale für den Fall ableiten, dass man in dieselben die Elemente von DELAUNAY in § 5 einführt, welche Ausdrücke im folgenden Paragraphen zur Anwendung kommen.

Diese Elemente waren

$$(22)\quad \begin{cases} L = \beta\sqrt{a}, & l = n(t+\gamma), \\ G = \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & g = \pi - \Omega, \\ H = \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h = \Omega. \end{cases}$$

Die Flächenintegrale (13) werden somit, durch diese Elemente ausgedrückt, folgende Form annehmen

$$(23)\quad \begin{cases} \sqrt{G^2-H^2}\sin h + \sqrt{G'^2-H'^2}\sin h' = \quad c_1'', \\ \sqrt{G^2-H^2}\cos h + \sqrt{G'^2-H'^2}\cos h' = -\,c_2'', \\ \qquad H \qquad + H' \qquad\qquad = \quad c_3''. \end{cases}$$

Wird die unveränderliche Ebene als Grundebene benutzt, so bekommt man, wie vorher, $h = h' + 180^0$, und hieraus lassen sich die Gleichungen (23) in folgender Form schreiben:

$$(24)\quad \begin{cases} h = h' + 180^\circ, \\ G^2 - H^2 = G'^2 - H'^2, \\ H + H' = c. \end{cases}$$

Diese bequemen Formen der Flächenintegrale werden wir im folgenden Paragraphen benutzen, um die Differentialgleichungen des Problems der drei Körper auf eine niedrigere Ordnung zu reduciren.

§ 10. Reduction der Differentialgleichungen des Problems der drei Körper auf vier Freiheitsgrade.

Die neun absoluten rechtwinkligen Coordinaten der drei Massen im Problem der drei Körper sind ursprünglich durch ein System von der 18ten Ordnung bestimmt § 1 (2). Mit Hilfe der sechs Schwerpunktsintegrale wird dies System auf die 12te Ordnung reducirt, entweder indem man gewöhnliche relative Coordinaten einführt, oder, wenn man das System in canonischer Form haben will, durch Einführung von canonischen relativen Coordinaten oder von Jacobi'schen Coordinaten oder in anderer Weise.

Das so erhaltene System von der 12ten Ordnung besitzt noch vier Integrale, nämlich die drei Flächenintegrale und das Integral der lebendigen Kraft. Es lässt sich somit hieraus ein System von der 8ten Ordnung aufstellen, wenn man diese Integrale benutzt. Will man die canonische Form der Differentialgleichungen behalten, so lässt sich dies System, von der 8ten Ordnung, als ein System von canonischen Differentialgleichungen mit *vier* Freiheitsgraden schreiben. Es wird sich dabei herausstellen, dass die charakteristische Function dieses canonischen Systems *von der Zeit explicite unabhängig bleibt.* Folglich existirt zu diesem System 8ter Ordnung noch das Integral der lebendigen Kraft und man könnte mit Hilfe desselben die Ordnung noch um eine Einheit erniedrigen.

Dass die Differentialgleichungen des Problems der drei Körper sich auf ein System von der 7ten Ordnung reduciren lassen, wurde von Lagrange in seiner classischen Arbeit „Essai sur le problème

des trois corps“ zuerst gezeigt, und dann von JACOBI a. a. O. in anderer Weise abgeleitet. Die nachfolgende Ableitung eines canonischen Systems mit 4 Freiheitsgraden für das Drei-Körperproblem rührt von POINCARÉ her (Méthodes nouvelles de la Méc. céleste I).

Wir gehen von den DELAUNAY'schen Differentialgleichungen aus, und nehmen an, dass die unveränderliche Ebene als XY-Ebene genommen wird.

Wir haben also die Differentialgleichungen

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\
\frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(1^*) \quad \frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l'}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L'}
$$

u. s. w.

und die Flächenintegrale lauten:

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
h &= h' + 180^\circ, \\
G^2 - H^2 &= G'^2 - H'^2. \\
H + H' &= c.
\end{aligned}
\right.
$$

Mittelst der zwei letzten von diesen Gleichungen können H und H' durch G und G' ausgedrückt werden. Die zweite Gleichung giebt

$$
G^2 - G'^2 = H^2 - H'^2 = (H + H')(H - H') = c(H - H'),
$$

so dass

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}(G^2 - G'^2), \\
H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}(G^2 - G'^2).
\end{aligned}
\right.
$$

Die Störungsfunction F ist von den Elementen L, G, H, l, g, h; L', G', H', l', g', h' abhängig. Es wird sich aber zeigen, dass, wenn die unveränderliche Ebene als Grundebene genommen wird, h und h' aus F verschwinden werden.

In dem vierten Abschnitt wurde nämlich gezeigt, dass die Coordinaten in den osculirenden Ellipsen periodische Functionen von l, g und h sind. Hieraus folgt, dass die Störungsfunction selbst, welche in § 5 (6), (6**) und (34) durch die Coordinaten ausgedrückt wird, eine periodische Function von l, g, h und l', g', h' wird, so dass wir also schreiben können

$$(4)\qquad F = \sum A \frac{\cos}{\sin}\left(il + jg + kh + i'l' + j'g' + k'h'\right),$$

wo i, j, k, i', j', k' alle ganzen Zahlenwerthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Die Coefficienten A sind nur von L, G, H, L', G', H' abhängig.

Nun ist nach dem dritten Flächenintegral (2)

$$H + H' = c,$$

und also

$$(5)\qquad \frac{dH}{dt} + \frac{dH'}{dt} = 0.$$

Nach (1) und (1*) wird also

$$(5^*)\qquad \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial h'} = 0.$$

Setzen wir den Werth (4) für die Störungsfunction in diese Gleichung ein, so bekommt man

$$(6)\qquad 0 = \sum (k + k') A \frac{-\sin}{\cos}\left(il + jg + kh + i'l' + j'g' + k'h'\right).$$

Diese Gleichung muss aber *identisch* erfüllt werden und dies ist nur möglich, wenn $k + k' = 0$, so dass die Elemente h und h' in der Störungsfunction immer in der Verbindung $h - h'$ auftreten.

Dies muss also nach Formel (23) im vorigen Abschnitte der Fall sein, wie auch die XY-Ebene gelegt wird. Wird im Besonderen die unveränderliche Ebene zur XY-Ebene gewählt, so hat man nach (2) noch

$$h - h' = 180^0, \tag{7}$$

so dass F in diesem Falle von h und h' unabhängig wird.

Wenn man mittelst (3) H und H' eliminirt, so wird F eine Function von L, G, l, g; L', G', l', g'. Benutzt man für die in dieser Function vorkommenden Grössen G und G' die Bezeichnungen Γ und Γ', so dass

$$G = \Gamma, \quad G' = \Gamma', \tag{8*}$$

so ist nach (3)

$$\left\{\begin{aligned} H &= \frac{c}{2} + \frac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\ H' &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Gamma} &= \frac{\partial F}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \Gamma} + \frac{\partial F}{\partial H'}\frac{\partial H'}{\partial \Gamma} \\ &= \frac{\partial F}{\partial G} \qquad + \frac{\partial F}{\partial H}\frac{\Gamma}{c} - \frac{\partial F}{\partial H'}\frac{\Gamma}{c}. \end{aligned}$$

Aus (7) und (1) folgt aber

$$\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial F}{\partial H'}, \tag{9}$$

und man hat also

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma} = \frac{\partial F}{\partial G}. \tag{10}$$

In gleicher Weise erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \Gamma'} = \frac{\partial F}{\partial G'}. \tag{10*}$$

Statt (1) und (1*) bekommen wir also nun folgende canonische Differentialgleichungen für das Problem der drei Körper:

$$
(11) \quad \begin{cases}
\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}, \\[2ex]
\dfrac{d\Gamma}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Gamma}, \\[2ex]
\dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l'}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L'}, \\[2ex]
\dfrac{d\Gamma'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \Gamma'}.
\end{cases}
$$

Man hat also hier nur vier Freiheitsgrade. F ist eine Function von $L, \Gamma, l, g; L', \Gamma', l', g'$, die man aus dem allgegemeinen Ausdruck (4) erhält, indem man mittelst (8*) und (8) G, G', H, H' eliminirt.

Die Bewegung der gemeinsamen Knotenlinie auf der unveränderlichen Ebene wird, nachdem $L, \Gamma, l, g; L', \Gamma', l'\ g'$ aus (11) als Functionen der Zeit erhalten worden sind, mittelst einer Quadratur gefunden. Man hat nämlich

$$
(12) \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H},
$$

wo *vor* der Differentiation F als eine Function der 12 *ursprünglichen* Elemente zu betrachten ist. *Nach* der Differentiation führt man Γ und Γ' mittelst (8*) und (8) ein, und wenn die Gleichungen (11) integrirt worden sind, so wird somit die rechte Seite von (12) eine bekannte Function der Zeit und also die Knotenlänge h durch eine Quadratur erhalten.

Da F die Zeit nicht *explicite* enthält, so hat man zu (11) das Integral der lebendigen Kraft

$$
(13) \qquad F = \text{Const.},
$$

wodurch man eins von den Elementen eliminiren kann und somit ein System von der 7ten Ordnung erhält. Nimmt man endlich eins von den übrigen Elementen (z. B. l) als unabhängige Veränderliche statt der Zeit, so hat man zuletzt ein *System von Differentialgleichungen von der sechsten Ordnung* für das Problem der drei Körper.

Dies System hat, wenn l als unabhängige Veränderliche benutzt wird, folgendes Aussehen:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma}{dl} = -\dfrac{\partial F}{\partial g} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, & \dfrac{dg}{dl} = \dfrac{\partial F}{\partial \Gamma} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, \\ \dfrac{dL'}{dl} = -\dfrac{\partial F}{\partial l'} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, & \dfrac{\partial l'}{\partial l} = \dfrac{\partial F}{\partial L'} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, \\ \dfrac{d\Gamma'}{\partial l} = -\dfrac{\partial F}{\partial g'} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, & \dfrac{\partial g'}{dl} = \dfrac{\partial F}{\partial \Gamma'} : \dfrac{\partial F}{\partial L}, \end{cases}$$

Nach der Ausführung der partiellen Differentiationen von F hat man L mittelst (13) aus den rechten Seiten der Gleichungen (14) zu eliminieren.

Die Gleichungen (14) sind nicht von canonischer Form. Nachdem das System (14) integrirt worden ist, erhält man mittelst der Gleichung

$$(15)\qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L},$$

die Grösse l durch eine Quadratur als Function der Zeit.

Handelt es sich nur um die Bewegung der drei Körper in *einer Ebene*, so lässt sich für die Bewegung ein canonisches System mit drei Freiheitsgraden aufstellen.

Für $i = 0$ fallen G und H zusammen und man kann setzen

$$(16)\qquad G = H = \Pi.$$

Nur ein Flächenintegral existirt, das nun heisst

$$(17)\qquad \Pi + \Pi' = c.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$(18)\qquad \frac{\partial F}{\partial g} + \frac{\partial F}{\partial g'} = 0,$$

wo g die Perihellänge bezeichnet. Diese Gleichung zeigt, dass F nur von der *Differenz* zwischen g und g' abhängt.

Führt man nun zwei Grössen K und k durch folgende Gleichungen ein

$$(19)\qquad \begin{cases} K = \Pi, \\ k = g - g', \end{cases}$$

aus welchen folgt, dass

$$(19^*)\qquad \Pi' = c - K,$$

so lässt sich mittelst (19*) und (19) F als eine Function von L, l, K, k, L' l' darstellen. Es ist nun

$$(20)\qquad \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial \Pi} - \frac{\partial F}{\partial \Pi'},$$

und demnach

$$(21)\qquad \frac{dk}{dt} = \frac{d(g-g')}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \Pi} + \frac{\partial F}{\partial \Pi'} = -\frac{\partial F}{\partial K}.$$

Weiter hat man

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g} = \frac{\partial F}{\partial k},$$

so dass die Differentialgleichungen für die Bewegung nunmehr lauten:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}, \\ \dfrac{dL'}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial l'}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial L'}, \\ \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial k}, & \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial K}, \end{cases}$$

welches ein canonisches System mit drei Freiheitsgraden ist.

Nachdem (22) integrirt worden ist, erhält man die Perihellänge g durch eine Quadratur mittelst der Gleichung

$$(22^*)\qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \Pi},$$

wo man nach der partiellen Differentiation von F die rechte Seite durch L, L', K; l, l', k auszudrücken hat.

Zu den Gleichungen (22) existirt das Integral der lebendigen Kraft

$$F = \text{Const.}, \tag{23}$$

und nimmt man zuletzt eines der Elemente als unabhängige Veränderliche statt der Zeit an, so lässt sich die Ordnung des Systems der Differentialgleichungen für die Bewegung in einer Ebene auf *vier* herunterdrücken. Das System wird *aber dann nicht* canonisch.

Bei der Reduction der Differentialgleichungen für das Problem der drei Körper auf vier Freiheitsgrade kann man sich beliebiger canonischer Coordinaten (q_i, p_i) bedienen. Man hat dabei nur die Flächenintegrale durch diese Coordinaten auszudrücken und die Reduction geschieht dann, mehr oder weniger umständlich, nach denselben Principien wie oben. Verfasser hat gezeigt (Meddelanden från Lunds Observatorium. Nr. 6) wie man, bei der Bewegung in einer Ebene, die Abstände der drei Körper von dem gemeinsamen Schwerpunkt als q-Coordinaten benutzen kann und somit, bei gebührender Wahl der entsprechenden canonischen p-Coordinaten, ein canonisches System mit drei Freiheitsgraden aufstellen kann. Diese Methode hat insofern ihre Vortheile, als man dabei die Störungsfunction als eine *algebraische* Function der Coordinaten erhält, wogegen die osculirenden Elemente in transcendenter Weise in die Störungsfunction eingehen. Dieselben Vortheile gewinnt man, wenn man, statt der Abstände der drei Körper von dem gemeinsamen Schwerpunkt, ihre gegenseitigen Entfernungen als q-Coordinaten wählt. Die Ableitung der Differentialgleichungen geschieht dabei in genau derselben Weise wie für die Abstände von dem Schwerpunkt. Die Reduction der Differentialgleichungen für diesen Fall auf vier Freiheitsgrade ist in eleganter Weise von BRUNS ausgeführt worden („Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems" 1887).

SECHSTER ABSCHNITT

STÖRUNGSTHEORIE

§ 1. Einführung neuer canonischer Elemente.

Wenn die $2n$ Grössen x_i und y_i durch ein canonisches System

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{d x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt sind, und man setzt

$$(2) \quad \begin{cases} x_i = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n), \\ y_i = g_i(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n), \end{cases}$$

so giebt es offenbar unendlich viele Formen der Functionen f_i und g_i, für welche die Differentialgleichungen für die neuen Veränderlichen ξ_i und η_i wieder von canonischer Form

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta_i}, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \xi_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

werden.

Wir wollen die Bedingungen hierfür aufsuchen, d. h. die Form der Functionen f_i und g_i so bestimmen, dass die Gleichungen (2) und (3) bestehen.

Es wird dabei angenommen, dass F als eine Function von x_i und y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *und der Zeit* gegeben ist.

Man hat nun

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},$$
$$+ \frac{\partial \xi_i}{d y_1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \xi_i}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt},$$

oder nach (1)

$$\frac{d\xi_\iota}{dt} = \frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial y_n} -$$
$$- \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \dots - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_n}\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Führen wir nun die Bezeichnung

(4) $$[a, b] = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial a}{\partial x_s}\frac{\partial b}{\partial y_s} - \frac{\partial a}{\partial y_s}\frac{\partial b}{\partial x_s}\right)$$

ein, so ist also

(5) $$\frac{d\xi_\iota}{dt} = [\xi_\iota, F].$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial y_s} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial y_s}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \eta_n}\frac{\partial \eta_n}{\partial y_s},$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_s}$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \eta_n}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_s},$$

und also

$$\frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_s}\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_s}\frac{\partial F}{\partial x_s} =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_s}\frac{\partial \xi_1}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_s}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_s}\right) +$$
$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_s}\frac{\partial \xi_n}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_s}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_s}\right) +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta_1}\left(\frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_s}\frac{\partial \eta_1}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_s}\frac{\partial \eta_1}{\partial x_s}\right) +$$
$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta_n}\left(\frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_s}\frac{\partial \eta_n}{\partial y_s} - \frac{\partial \xi_\iota}{\partial y_s}\frac{\partial \eta_n}{\partial x_s}\right).$$

Werden alle diese Ausdrücke summirt, indem man nach einander $s = 1, 2, \dots, n$ setzt, so bekommt man

$$(6)\quad \begin{cases} [\xi_i, F] = [\xi_i, \xi_1]\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} + \cdots + [\xi_i, \xi_n]\dfrac{\partial F}{\partial \xi_n} + \\ \qquad + [\xi_i, \eta_1]\dfrac{\partial F}{\partial \eta_1} + \cdots + [\xi_i, \eta_n]\dfrac{\partial F}{\partial \eta_n}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$(6^*)\quad \begin{cases} \dfrac{d\eta_i}{dt} = [\eta_i, F] = \\ \qquad = [\eta_i, \xi_1]\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1} + \cdots + [\eta_i, \xi_n]\dfrac{\partial F}{\partial \xi_n} + \\ \qquad + [\eta_i, \eta_1]\dfrac{\partial F}{\partial \eta_1} + \cdots + [\eta_i, \eta_n]\dfrac{\partial F}{\partial \eta_n}. \end{cases}$$

Es wurde aber verlangt, dass

$$(3)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$$

sein würde und offenbar sind diese Gleichungen erfüllt, wenn folgende Relationen bestehen:

$$(7)\quad \begin{cases} [\xi_i, \xi_r] = \;\; 0, \\ [\eta_i, \eta_r] = \;\; 0, \\ [\xi_i, \eta_r] = \;\; 0, \quad (i \neq r) \\ [\xi_i, \eta_i] = +1 \\ (i, r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Sind diese Gleichungen erfüllt, so sind die durch (2) eingeführten Veränderlichen canonisch.

Die Relationen (7) sind *hinreichend*; ob sie auch *nothwendig* sind, ist zwar für unseren Zweck gleichgültig, da nämlich bei den hier zu untersuchenden Substitutionen diese Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Man findet aber, indem man (6) und (6*) mit (3) vergleicht, dass, wenn man keine *besonderen* Voraussetzungen über die Function F macht, die Gleichungen (7) auch nothwendig sind.

Mit Hilfe dieses Theorems wollen wir nun neue canonische Veränderliche statt der Delaunay'schen Elemente einführen.

1) Statt der Elemente L, G, H, l, g, h führen wir die neuen Veränderlichen Λ, Γ, Z, λ, γ, z durch folgende Gleichungen ein:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Lambda = L, & \Gamma = L - G, & Z = G - H, \\ \lambda = l + g + h, & \gamma = -g - h, & z = -h, \end{cases}$$

und entsprechende Grössen für die Elemente L', G' u. s. w.

Die neuen Elemente Λ, Γ u. s. w. sind canonisch.

In der That, wenn die alten Elemente (L, G, H; l, g, h) mit x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden, so dass $L = x_1$, $G = x_2$ u. s. w., und die entsprechenden neuen Elemente mit ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3, so dass $\Lambda = \xi_1$, $\Gamma = \xi_2$ u. s. w., so findet man erstens, dass

$$[\xi_i, \xi_r] = [\eta_i, \eta_r] = 0,$$

da nämlich die ξ_i nur von x_1, x_2, x_3 und die η_i nur von y_1, y_2, y_3 abhängen.

Weiter ist:

$$\begin{array}{lll} [\xi_1, \eta_1] = +1, & [\xi_2, \eta_1] = 0, & [\xi_3, \eta_1] = 0, \\ [\xi_1, \eta_2] = 0, & [\xi_2, \eta_2] = +1, & [\xi_3, \eta_2] = 0, \\ [\xi_1, \eta_3] = 0, & [\xi_2, \eta_3] = 0, & [\xi_3, \eta_3] = +1. \end{array}$$

Die Bedingungen (7) sind also erfüllt, und die neuen Elemente somit canonisch.

Durch die elliptischen Elemente ausgedrückt ist nun

$$(9)\qquad \begin{cases} \Lambda = \beta\sqrt{a}, & \Gamma = \beta\sqrt{a}(1 - \sqrt{1-e^2}), & Z = \beta\sqrt{a(1-e^2)}(1 - \cos i), \\ \lambda = l + \pi, & \gamma = -\pi, & z = -\Omega. \end{cases}$$

Es bedeutet also λ *die mittlere Länge* in der Bahn, $-\gamma$ die *Länge des Perihels*, $-z$ die *Knotenlänge*. Das Element Γ ist dem *Quadrate der Excentricität* proportional, Z dem *Quadrate der Neigung*.

2) Statt der Elemente Γ, Z; γ, z führen wir weiter die Elemente ξ, η; p, q durch folgende Gleichungen ein:[1]

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, & p = \sqrt{2Z}\cos z, \\ \eta = \sqrt{2\Gamma}\sin\gamma, & q = \sqrt{2Z}\sin z. \end{cases}$$

Die neuen Elemente sind auch canonisch.

Da bei der Substitution (10) in den Ausdrücken für die neuen Elemente nur zwei conjugirte Elemente eingehen, so können wir, weil wir bei der Ableitung von (7) vorausgesetzt haben, dass F auch eine Function von t sein kann, jede Substitution für sich untersuchen.

Angenommen also, dass man in den Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x},$$

wo F von x, y und der Zeit abhängig ist, die Substitutionen

$$(12)\qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{2x}\cos y, \\ \eta = \sqrt{2x}\sin y \end{cases}$$

macht, dann ist

$$[\xi, \xi] = [\eta, \eta] = 0,$$

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}}\cos y \cdot \sqrt{2x}\cos y + \sqrt{2x}\sin y \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}}\sin y = +1,$$

und ξ, η sind canonisch.

Es folgt hieraus, dass die durch (10) definirten Elemente canonisch sind.

Die canonischen Elemente, welche wir somit erhalten haben, wollen wir den folgenden Untersuchungen über die Störungstheorie

---

[1] Poincaré: Méthodes nouvelles de la Méc. cél. I S. 30.

zu Grunde legen. Ihre Bedeutung, in elliptischen Elementen ausgedrückt, ist nach (10) und (9) die folgende:

$$(13)\begin{cases} \Lambda = \beta\sqrt{a}, & \lambda = \quad l + \pi = \textit{mittlere Länge}, \\ \xi = \sqrt{2\Lambda(1-\sqrt{1-e^2})}\cos\pi, & \eta = -\sqrt{2\Lambda(1-\sqrt{1-e^2})}\sin\pi, \\ p = \sqrt{2\Lambda\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\cos\Omega, & q = -\sqrt{2\Lambda\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}\sin\Omega. \end{cases}$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen diesen *Poincaré'schen Elementen* und den elliptischen Elementen näher untersuchen.

Aus (13) folgt, dass

$$(14)\qquad \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = 2(1-\sqrt{1-e^2}) = e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \ldots$$

Diese Gleichung zeigt, dass e^2 nach den Potenzen der Grösse

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2$$

entwickelt werden kann. Man bekommt

$$(14^*)\qquad e^2 = \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]^2 + \ldots$$

Da weiter

$$\sqrt{2(1-\sqrt{1-e^2})} = e\left(1 + \frac{1}{8}e^2 + \ldots\right),$$

so ist

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} = \quad e\cos\pi \times (1 + \sum \alpha_n e^{2n}),$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} = -e\sin\pi \times (1 + \sum \alpha_n e^{2n}).$$

Nach (14*) folgt hieraus, dass

$$(15)\begin{cases} e\cos\pi = \quad \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right] + \ldots\right), \\ e\sin\pi = -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right] + \ldots\right), \end{cases}$$

so *dass* $e \cos \pi$ *und* $e \sin \pi$ *nach Potenzen von* $\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}$ *und* $\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}$ *entwickelt werden können.* Umgekehrt geht aus (15) hervor, dass $\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}$ und $\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}$ nach Potenzen der Grössen $e \cos \pi$, und $e \sin \pi$ entwickelt werden können.

Betrachten wir nun die Elemente p und q, so finden wir, dass

$$\frac{p}{\sqrt{\Delta}}(1-e^2)^{-1/4} = \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\sin^2 i}\right)} \cos \Omega,$$

$$\frac{q}{\sqrt{\Delta}}(1-e^2)^{-1/4} = -\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-\sin^2 i}\right)} \sin \Omega,$$

aus welchen Ausdrücken folgt, dass

$$\sin i \cos \Omega \quad \text{und}$$
$$\sin i \sin \Omega$$

nach den positiven Potenzen der Grössen

$$\frac{p}{\sqrt{\Delta}}(1-e^2)^{-1/4} \quad \text{und} \quad \frac{q}{\sqrt{\Delta}}(1-e^2)^{-1/4}$$

entwickelt werden können.

Wir sind also zu dem Schluss gekommen, dass *die Grössen*

$$e \cos \pi, \qquad e \sin \pi,$$
$$\sin i \cos \Omega, \qquad \sin i \sin \Omega$$

nach den positiven Potenzen der Grössen

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}, \frac{p}{\sqrt{\Delta}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Delta}}$$

entwickelt werden können, und umgekehrt.

Werden die Glieder dritter Ordnung vernachlässigt, so hat man

$$(16)\quad \begin{cases} e \cos \pi = \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}, & e \sin \pi = -\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}, \\ \sin i \cos \Omega = \frac{p}{\sqrt{\Delta}}, & \sin i \sin \Omega = -\frac{q}{\sqrt{\Delta}}. \end{cases}$$

Wir werden im nächsten Paragraphen beweisen, dass die Störungsfunction sich nach Potenzen von $e\cos\pi$, $e\sin\pi$, $\sin i\cos\Omega$ und $\sin i \sin\Omega$ entwickeln lässt. Es folgt dann auch, dass sie nach den Potenzen von $\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$, $\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}$ und $\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$ entwickelt werden kann.

§ 2. Form der Entwickelung der Störungsfunction.

Führen wir die Bezeichnungen

$$(1)\qquad \begin{cases} r = e\cos\pi, & u = \sin i\cos\Omega, \\ s = e\sin\pi, & v = \sin i\sin\Omega, \\ r' = e'\cos\pi' & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ein, so lässt sich zeigen, dass die Störungsfunction sich nach den Potenzen von r, s, u, v, r', s' u. s. w. entwickeln lässt, und die Coefficienten in dieser Entwickelung sind dann Functionen der Elemente Λ, λ, Λ', λ' u. s. w.

Da die Störungsfunction eine analytische Function der Coordinaten ist, die für $0 = r = s = u = v = r' \ldots$ endlich ist, so genügt es zu beweisen, dass die *Coordinaten* nach den Potenzen der fraglichen Grössen entwickelt werden können.

Wir bemerken zuerst, dass

$$e^2 = r^2 + s^2,$$

$$\sin^2 i = u^2 + v^2,$$

und also

$$e^{2n} = (r^2 + s^2)^n,$$

$$\sin^{2n} i = (u^2 + v^2)^n,$$

woraus folgt, dass alle *geraden* Potenzen von e und $\sin i$ ganze rationale Functionen von r, s, u, v sind.

Für die rechtwinkligen Coordinaten haben wir in § 9 des vierten Abschnittes folgende Ausdrücke gefunden

$$(2) \quad \begin{cases} x = A\,\xi + B\,\eta, \\ y = A_1\xi + B_1\eta, \\ z = A_2\xi + B_2\eta, \end{cases}$$

wo

$$(2^*) \quad \begin{cases} \xi = \qquad a\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \cos i l, \\ \eta = a\sqrt{1-e^2}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} J_{ie}^{i-1} \sin i l. \end{cases}$$

Die Coefficienten A, B, A_1 u. s. w. hatten folgende Werthe

$$(2^{**}) \quad \begin{cases} A = \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i, \\ B = -\sin(\pi - \Omega)\cos\Omega - \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i, \\ A_1 = \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega + \sin(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i, \\ B_1 = -\sin(\pi - \Omega)\sin\Omega + \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i, \\ A_2 = \sin(\pi - \Omega)\sin i, \\ B_2 = \cos(\pi - \Omega)\sin i. \end{cases}$$

Diese Coefficienten können in folgender Weise geschrieben werden:

$$A = \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega(1 - \sin^2 i)^{1/2}$$

$$= \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 i - \frac{1}{8}\sin^4 i - \right)$$

$$= \cos\pi + \frac{1}{2}\sin^2 i \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 i + \ldots\right)$$

$$= \cos\pi + \frac{1}{2}\sin^2 i \sin\Omega[\sin\pi\cos\Omega - \cos\pi\sin\Omega]\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 i + \ldots\right)$$

$$= \cos\pi + \left(\frac{1}{2} u v \sin\pi - \frac{1}{2} v^2 \cos\pi\right)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 i + \ldots\right).$$

Werden die übrigen Coefficienten in ähnlicher Weise umgeschrieben, so wird nun, wenn folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(3) \quad \begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} u^2 \left(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots\right), \\ P_2 = \frac{1}{2} u v \left(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots\right), \\ P_3 = \frac{1}{2} v^2 \left(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots\right), \end{cases}$$

so dass P_1, P_2 und P_3 Reihen bezeichnen, welche nach den positiven Potenzen von u und v fortschreiten (und mit Gliedern zweiten Grades anfangen):

$$(4) \quad \begin{cases} A = \cos\pi + P_2 \sin\pi - P_3 \cos\pi, \\ B = -\sin\pi + P_2 \cos\pi + P_3 \sin\pi, \\ A_1 = \sin\pi - P_1 \sin\pi + P_2 \cos\pi, \\ B_1 = \cos\pi - P_1 \cos\pi - P_2 \sin\pi, \\ A_2 = u \sin\pi - v \cos\pi, \\ B_2 = u \cos\pi + v \sin\pi. \end{cases}$$

Ich erinnere nun an einen Satz aus der Trigonometrie, nämlich

$$(5) \quad \cos n\theta = C_n \cos^n\theta + C_{n-2} \cos^{n-2}\theta + \ldots,$$

wo C_n, C_{n-2} u. s. w. nur von n abhängen, und die Reihe so lange fortgesetzt wird, bis keine positiven Potenzen von $\cos\theta$ mehr auftreten.

Durch Differentiation erhält man die entsprechende Reihe für $\sin n\theta$

$$(5^*) \quad \sin n\theta = \sin\theta \left[D_{n-1} \cos^{n-1}\theta + D_{n-3} \cos^{n-3}\theta + \ldots\right].$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man

$$(6) \quad \begin{cases} e^n \cos n\pi = C_n r^n + C_{n-2} r^{n-2}(r^2 + s^2) + \ldots, \\ e^n \sin n\pi = s\left[D_{n-1} r^{n-1} + D_{n-3} r^{n-3}(r^2 + s^2) + \ldots,\right. \end{cases}$$

so dass mithin $e^n \cos n\pi$ und $e^n \sin n\pi$ ganze rationale Functionen von r und s vom Grade n sind.

Betrachten wir nun zuerst das constante Glied in (2*). Nach IV § 9 ist dasselbe in η gleich Null und in ξ gleich $-\frac{3}{2}ae$. Wird es mit A, A_1 oder A_2 multiplicirt, so bekommt man offenbar nur Glieder, die durch r, s, u, v ausgedrückt werden können.

Lassen wir nun das constante Glied aus, und schaffen wir die negativen Indices in (2*) weg, so können wir schreiben

$$\xi = a\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}\right)\cos il,$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}\right)\sin il,$$

wo wir statt l die *mittlere Länge* einzuführen haben durch die Gleichung § 1 (13)

$$l = \lambda - \pi. \tag{7}$$

Es ist also

$$\text{(8)}\quad \begin{cases} \xi = a\sum\frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} - J_{ie}^{i+1}\right)(\cos i\pi\cos i\lambda + \sin i\pi\sin i\lambda), \\ \eta = a\sqrt{1-e^2}\sum\frac{1}{i}\left(J_{ie}^{i-1} + J_{ie}^{i+1}\right)(-\sin i\pi\cos i\lambda + \cos i\pi\sin i\lambda). \end{cases}$$

Die Coefficienten J_{ie}^{k} können nach den positiven Potenzen von e entwickelt werden, und es war nach IV § 9 (9)

$$J_{ie}^{i-1} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-1}}{\lfloor i-1}\left\{1 - \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^2}{\lfloor 1\cdot i} + \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^4}{\lfloor 2\cdot i(i+1)} - \cdots\right\}, \tag{9}$$

$$J_{ie}^{i+1} = \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i+1}}{\lfloor i+1}\left\{1 - \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^2}{\lfloor 1\cdot(i+2)} + \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^4}{\lfloor 2\cdot(i+2)(i+3)} - \cdots\right\}. \tag{9*}$$

Wenn man nun diese Ausdrücke in (8) einsetzt, so findet man, dass J_{ie}^{i-1} und J_{ie}^{i+1} mit $\cos i\pi$ oder $\sin i\pi$ zu multipliciren sind, und wenn man die Ausdrücke (2) und (4) berücksichtigt, ausserdem mit $\cos\pi$ oder $\sin\pi$.

Nach (6) lassen sich offenbar die Producte

$$\begin{array}{ccc} J_{\iota\epsilon}^{i+1} \cos i\pi & & \cos\pi, \\ & \times & \\ \textit{oder}\ J_{\iota\epsilon}^{i+1} \sin i\pi & & \textit{oder}\ \sin\pi \end{array}$$

nach Potenzen von u und v entwickeln.

Ebenso findet man unmittelbar, dass

$$\begin{array}{ccc} e^2 J_{\iota\epsilon}^{i-1} \cos i\pi & & \cos\pi, \\ & \times & \\ \textit{oder}\ e^2 J_{\iota\epsilon}^{i-1} \sin i\pi & & \textit{oder}\ \sin\pi \end{array}$$

sich in dieser Weise entwickeln lassen.

Es bleiben also nur diejenigen Glieder in ξ und η zu untersuchen, welche von folgender Form sind:

$$(10)\quad \begin{cases} (\xi) = a\sum \frac{1}{i} J_{\iota\epsilon}^{i-1} \quad (\cos i\pi \cos i\lambda + \sin i\pi \sin i\lambda), \\ (\eta) = a\sum \frac{1}{i} J_{\iota\epsilon}^{i-1} (-\sin i\pi \cos i\lambda + \cos i\pi \sin i\lambda), \end{cases}$$

welche Ausdrücke statt ξ und η in (2) einzusetzen sind.

Macht man diese Substitutionen, so findet man aber, dass man nur die folgenden beiden Combinationen erhält, nämlich entweder

$$J_{\iota\epsilon}^{i-1} \cos(i-1)\pi$$

oder

$$J_{\iota\epsilon}^{i-1} \sin(i-1)\pi,$$

und beide lassen sich nach (6) als Potenzreihen in r und s darstellen.

Hiermit ist also bewiesen, dass die Coordinaten nach den Potenzen der Grössen u, v, r, s entwickelt werden können, und also auch nach den Potenzen der Poincaré'schen Elemente ξ, η, p, q.

Der hier gegebene Beweis ist etwas umständlich und könnte vielleicht kürzer gemacht werden.

§ 3. Entwickelung der Störungsfunction.

Indem wir uns vorläufig auf das Problem der drei Körper beschränkten, hatte die Störungsfunction F — unter Anwendung von JACOBI'schen Coordinaten — nach V § 5 (34) folgendes Aussehen:

$$(1)\quad \begin{cases} F = \dfrac{\beta^4}{2\mu L^2} + \dfrac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} + \\ \qquad + \dfrac{k^2 m_a m_c}{r_{ca}} - \dfrac{k^2 m_a m_c}{r_{ga}}, \end{cases}$$

wo

$$(2)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{k m_b m_c}{\sqrt{m_b + m_c}}, \\ \beta' = k m_a \sqrt{\dfrac{m_c(m_b + m_c)}{m_a + m_b + m_c}}. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Körpers B in Bezug auf C als Anfangspunkt sind q_1, q_2, q_3, und die Elemente der von B beschriebenen, osculirenden Ellipse sind $\varDelta$, λ, ξ, η, p, q. Die entsprechenden Grössen (Coordinaten und Elemente) für den Körper A, auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt von C und B liegt, wollen wir mit gestrichenen Buchstaben bezeichnen. Es ist dann nach V § 5 (6) und (6**)

$$(3)\quad \begin{cases} r^2_{ga} = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2, \\ r^2_{ca} = \left(\dfrac{m_b}{m_c + m_b}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \\ \qquad + \dfrac{2 m_b}{m_c + m_b}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'), \\ r^2_{ab} = \left(\dfrac{m_c}{m_c + m_b}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - \\ \qquad - \dfrac{2 m_c}{m_c + m_b}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'). \end{cases}$$

Nach dem vorigen Paragraphen können die Coordinaten nach Potenzen von $\dfrac{\xi}{\sqrt{\varDelta}}$, $\dfrac{\eta}{\sqrt{\varDelta}}$, $\dfrac{p}{\sqrt{\varDelta}}$, $\dfrac{q}{\sqrt{\varDelta}}$; $\dfrac{\xi'}{\sqrt{\varDelta'}}$, u. s. w. entwickelt

werden und hieraus erhält man für die Störungsfunction eine Entwickelung von ähnlicher Art. Wir wollen diese Entwickelung bis zum zweiten Grad *inclusive* der betreffenden Grössen ausführen.

Diese Entwickelung kann bis zu einem beliebigen Grad der Excentricität und der Neigung nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode ausgeführt werden. Beschränken wir uns darauf, die zweiten Potenzen der fraglichen Grössen zu behalten, so können wir beispielsweise in folgender Weise vorgehen.

Nach IV § 9 (19) und (23) ist

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{q_1}{a} = A(\cos w - e) + B\sqrt{1-e^2}\sin w, \\[2ex] \dfrac{q_2}{a} = A_1(\cos w - e) + B_1\sqrt{1-e^2}\sin w, \\[2ex] \dfrac{q_3}{a} = A_2(\cos w - e) + B_2\sqrt{1-e^2}\sin w. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für A, B, A_1 u. s. w. sind in (4) des vorigen Paragraphen gegeben.

Es wird also

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{q_1}{a} = -Ae + \cos\pi\cos w - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin w + \\ \qquad + P_2\ (\sin\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin w) + \\ \qquad + P_3(-\cos\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin w), \\ \dfrac{q_2}{a} = -A_1 e + \sin\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin w - \\ \qquad - P_1\ (\sin\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin w) + \\ \qquad + P_2\ (\cos\pi\cos w - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin w), \\ \dfrac{q_3}{a} = -A_2 e + u(\sin\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin w) + \\ \qquad + v(-\cos\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin w). \end{cases}$$

Es ist aber

$$A\ e = r + P_2 s - P_3 r,$$
$$A_1 e = s - P_1 s + P_2 r,$$
$$A_2 e = us - vr,$$

und führen wir die Bezeichnungen

$$(6)\quad \begin{cases} D = \cos\pi\cos w - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin w, \\ E = \sin\pi\cos w + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin w \end{cases}$$

ein, so ist

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{q_1}{a} = -r - P_2 s + P_3 r + D + P_2 E - P_3 D, \\ \frac{q_2}{a} = -s + P_1 s - P_2 r + E - P_1 E + P_2 D, \\ \frac{q_3}{a} = \quad v r - u s + u E - v D, \end{cases}$$

so dass nur übrig bleibt, die Grössen D und E nach Potenzen von r und s zu entwickeln.

Mit Hilfe der Bessel'schen Integrale oder in anderer Weise erhält man nun bis zum zweiten Grade in e

$$\cos w = \cos l + \frac{e}{2}(\cos 2l - 1) + \frac{3}{8}e^2(\cos 3l - \cos l),$$

$$\sin w = \sin l + \frac{e}{2}\sin 2l \qquad + \frac{1}{8}e^2(3\sin 3l - \sin l),$$

Führt man hier die mittlere Länge λ durch die Relation

$$\lambda = l + \pi$$

ein, so bekommen wir endlich

$$(8)\quad \begin{cases} D = \cos\lambda + \frac{1}{2}r(\cos 2\lambda - 1) + \frac{1}{2}s\sin 2\lambda + \\ \qquad + \frac{3}{8}r^2(\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \frac{1}{8}s^2(3\cos 3\lambda + 5\cos\lambda) + \\ \qquad + \frac{1}{4}rs(3\sin 3\lambda + \sin\lambda), \\ E = \sin\lambda + \frac{1}{2}r\sin 2\lambda - \frac{1}{2}s(\cos 2\lambda + 1) + \\ \qquad + \frac{1}{8}r^2(3\sin 3\lambda - 5\sin\lambda) - \frac{3}{8}s^2(\sin 3\lambda + \sin\lambda) - \\ \qquad - \frac{1}{4}rs(3\cos 3\lambda - \cos\lambda). \end{cases}$$

Führen wir nun statt r, s, u, v die Elemente ξ, η, p, q nach § 1 (16) ein, und ziehen wir die Ausdrücke § 2 (3) in Betracht, so bekommt man endlich

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{q_1}{a} &= \cos\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{A}}(\cos 2\lambda - 3) - \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{A}}\sin 2\lambda + \\
&+ \tfrac{3}{8}\frac{\xi^2}{A}(\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \tfrac{1}{8}\frac{\eta^2}{A}(3\cos 3\lambda + 5\cos\lambda) - \\
&- \tfrac{1}{4}\frac{\xi\eta}{A}(3\sin 3\lambda + \sin\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{pq}{A}\sin\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{A}\cos\lambda\,, \\
\frac{q_2}{a} &= \sin\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{A}}\sin 2\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{A}}(\cos 2\lambda + 3) + \\
&+ \tfrac{1}{8}\frac{\xi^2}{A}(3\sin 3\lambda - 5\sin\lambda) - \tfrac{3}{8}\frac{\eta^2}{A}(\sin 3\lambda + \sin\lambda) + \\
&+ \tfrac{1}{4}\frac{\xi\eta}{A}(3\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{p^2}{A}\sin\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{pq}{A}\cos\lambda\,, \\
\frac{q_3}{a} &= \frac{p}{\sqrt{A}}\sin\lambda + \frac{q}{\sqrt{A}}\cos\lambda + \\
&+ \tfrac{1}{2}\frac{\xi p}{A}\sin 2\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{\xi q}{A}(3 - \cos 2\lambda) + \\
&+ \tfrac{1}{2}\frac{\eta p}{A}(3 + \cos 2\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{\eta q}{A}\sin 2\lambda\,.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man weiter

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
r^2_{bc} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = a^2\Big[1 &- 2\frac{\xi}{\sqrt{A}}\cos\lambda + 2\frac{\eta}{\sqrt{A}}\sin\lambda + \\
&+ \tfrac{1}{2}\frac{\xi^2}{A}(3 - \cos 2\lambda) + \tfrac{1}{2}\frac{\eta^2}{A}(3 + \cos 2\lambda) + \\
&+ \frac{\xi\eta}{A}\sin 2\lambda\Big]
\end{aligned}\right.$$

und

$$(10^*)\quad \left\{\begin{aligned}
r^2_{ga} = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 = a'^2\Big[1 &- 2\frac{\xi'}{\sqrt{A'}}\cos\lambda' + 2\frac{\eta'}{\sqrt{A'}}\sin\lambda' + \\
&+ \tfrac{1}{2}\frac{\xi'^2}{A'}(3 - \cos 2\lambda) + \tfrac{1}{2}\frac{\eta'^2}{A'}(3 + \cos 2\lambda') + \\
&+ \frac{\xi'\eta}{A'}\sin 2\lambda'\Big].
\end{aligned}\right.$$

Aus (9) leitet man den folgenden Ausdruck für $q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'$ ab:

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'}{a a'} &= \cos(\lambda - \lambda') + \\
&+ \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}} \left[\tfrac{1}{2} \cos(2\lambda - \lambda') - \tfrac{3}{2} \cos \lambda'\right] + \\
&+ \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}} \left[- \tfrac{1}{2} \sin(2\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{2} \sin \lambda'\right] \\
&+ \frac{\xi'}{\sqrt{\Delta'}} \left[\tfrac{1}{2} \cos(2\lambda' - \lambda) - \tfrac{3}{2} \cos \lambda\right] + \\
&+ \frac{\eta'}{\sqrt{\Delta'}} \left[- \tfrac{1}{2} \sin(2\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{2} \sin \lambda\right] + \\
&+ \frac{\xi^2}{\Delta} \left[\tfrac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\eta^2}{\Delta} \left[- \tfrac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi \eta}{\Delta} \left[- \tfrac{3}{4} \sin(3\lambda - \lambda') \qquad\qquad - \tfrac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi'^2}{\Delta'} \left[\tfrac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) - \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\eta'^2}{\Delta'} \left[- \tfrac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda) - \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi' \eta'}{\Delta'} \left[- \tfrac{3}{4} \sin(3\lambda' - \lambda) \qquad\qquad - \tfrac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi \xi'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left[\tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{4} \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4} \cos 2\lambda' + \tfrac{1}{4} \cos 2\lambda - 2\lambda')\right] \\
&+ \frac{\eta \eta'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left[\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4} \cos 2\lambda + \tfrac{3}{4} \cos 2\lambda' + \tfrac{1}{4} \cos(2\lambda - 2\lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi \eta'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left[\tfrac{3}{4} \sin 2\lambda + \tfrac{3}{4} \sin 2\lambda' + \tfrac{1}{4} \sin(2\lambda - 2\lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi' \eta}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left[\tfrac{3}{4} \sin 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \sin 2\lambda + \tfrac{1}{4} \sin(2\lambda' - 2\lambda)\right] + \\
&+ \frac{p^2}{\Delta} \left[\tfrac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda')\right]
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+ \frac{q^2}{A}\left[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right] - \\
&- \tfrac{1}{2}\frac{pq}{A}\sin(\lambda+\lambda') + \\
&+ \frac{p'^2}{A'}\left[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{q'^2}{A'}\left[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right] - \\
&- \tfrac{1}{2}\frac{p'q'}{A'}\sin(\lambda+\lambda') + \\
&+ \frac{pp'}{\sqrt{AA'}}\left[-\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{qq'}{\sqrt{AA'}}\left[\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{pq'}{\sqrt{AA'}}\left[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{p'q}{\sqrt{AA'}}\left[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda'+\lambda) + \tfrac{1}{2}\sin(\lambda'-\lambda)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Man hat nun die Ausdrücke (10) und (11) in (3) und (1) einzusetzen. Es ergiebt sich dabei, dass die Entwickelung der Störungsfunction sich sehr umständlich gestaltet, *wenn man nicht gleichzeitig mit der Entwickelung nach den Potenzen von* $\frac{\xi}{\sqrt{A}}$, $\frac{\eta}{\sqrt{A}}$ u. s. w. *auch eine Entwickelung nach den Potenzen der, als klein angenommenen, Massen* m_a *und* m_b *vornimmt.* Dies ist ein Nachtheil, der bei der Anwendung von Jacobi'schen Coordinaten eintritt, und der bei gewöhnlichen relativen Coordinaten, ebensowohl wie bei canonischen relativen Coordinaten, vermieden werden kann. Obgleich dieser Umstand, vom theoretischen Gesichtspunkte betrachtet, unter Umständen als ein erheblicher Mangel der Jacobi'schen Coordinaten betrachtet werden könnte, so ist indessen zu bemerken: *erstens,* dass es keine *mathematischen* Schwierigkeiten darbietet, auch unter Anwendung von Jacobi'schen Coordinaten eine Entwickelung nach den Potenzen der Massen zu vermeiden, da es sich hier wesentlich nur um eine Bequemlichkeitsfrage handelt, und *zweitens,* dass für

störungstheoretische Untersuchungen, bei denen so wie so eine Entwickelung nach den Potenzen der Massen geschieht, der bemerkte Uebelstand dieser Coordinaten von keiner Bedeutung ist.

Indem wir also in dem Ausdruck für die Störungsfunction alle Glieder von höherem Grade als dem zweiten in Bezug auf die Massen vernachlässigen, so können wir setzen:

$$(12)\quad \begin{cases} r^2_{ab} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 - 2(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'), \\ r^2_{ca} = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \frac{2 m_b}{m_c}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'), \end{cases}$$

und also

$$\frac{1}{r_{ca}} = \frac{1}{r_{ga}}\left(1 + \frac{2 m_b}{r^2_{ga} m_c}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3')\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r_{ga}} - \frac{m_b}{m_c}\frac{1}{r^3_{ga}}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3').$$

Der Ausdruck für die Störungsfunction wird somit bis zu Gliedern von der zweiten Ordnung (incl.) in Bezug auf die Massen:

$$(13)\quad \begin{cases} F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \\ \quad + \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r^3_{ga}}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'). \end{cases}$$

Die Hauptschwierigkeit liegt in der Entwickelung von r_{ab}^{-1}, für welche Grösse wir den Ausdruck (12) zu benutzen haben.

Wir unterscheiden nun in r^2_{ab} zwei Theile Δ_0^2 und f, von denen Δ_0^2 diejenigen Glieder enthält, welche vom nullten Grade in ξ, η u. s. w. sind, f alle übrigen. Es ist dann

$$(14)\qquad \Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\lambda - \lambda'),$$

und

$$(15)\qquad r^2_{ab} = \Delta_0^2 + f,$$

also

$$(16)\qquad \frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{\Delta_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f}{\Delta_0^2} + \frac{3}{8}\frac{f^2}{\Delta_0^4} - \dots\right).$$

Die Bedingungen für die Convergenz dieser Entwickelung werden wir in einem der folgenden Abschnitte untersuchen. Man bekommt nun

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{f}{\Delta_0^3} = \\
& = \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}\,\Delta_0^3}[a^2\cos\lambda - \tfrac{3}{2}\,a\,a'\cos\lambda' + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(2\lambda-\lambda')] + \\
& + \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}\,\Delta_0^3}[-a^2\sin\lambda + \tfrac{3}{2}\,a\,a'\sin\lambda' - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(2\lambda-\lambda')] + \\
& + \frac{\xi'}{\sqrt{\Delta'}\,\Delta_0^3}[a'^2\cos\lambda' - \tfrac{3}{2}\,a\,a'\cos\lambda + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(2\lambda'-\lambda)] + \\
& + \frac{\eta'}{\sqrt{\Delta'}\,\Delta_0^3}[-a'^2\sin\lambda' + \tfrac{3}{2}\,a\,a'\sin\lambda - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(2\lambda'-\lambda)] + \\
& + \frac{\xi^2}{\Delta\,\Delta_0^3}[-\tfrac{3}{4}\,a^2 + \tfrac{1}{8}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda') + \\
& + \tfrac{1}{4}\,a^2\cos 2\lambda + \tfrac{9}{8}\,a\,a'\cos(3\lambda-\lambda')] + \\
& + \frac{\eta^2}{\Delta\,\Delta_0^3}[-\tfrac{3}{4}\,a^2 - \tfrac{1}{8}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda') - \\
& - \tfrac{1}{4}\,a^2\cos 2\lambda - \tfrac{9}{8}\,a\,a'\cos(3\lambda-\lambda')] + \\
& + \frac{\xi\,\eta}{\Delta\,\Delta_0^3}[-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a^2\sin 2\lambda - \\
& - \tfrac{9}{4}\,a\,a'\sin(3\lambda-\lambda')] + \\
& + \frac{\xi'^2}{\Delta'\,\Delta_0^3}[-\tfrac{3}{4}\,a'^2 + \tfrac{1}{8}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda') + \\
& + \tfrac{1}{4}\,a'^2\cos 2\lambda' + \tfrac{9}{8}\,a\,a'\cos(3\lambda'-\lambda)] + \\
& + \frac{\eta'^2}{\Delta'\,\Delta_0^3}[-\tfrac{3}{4}\,a'^2 - \tfrac{1}{8}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda') - \\
& - \tfrac{1}{4}\,a'^2\cos 2\lambda' - \tfrac{9}{8}\,a\,a'\cos(3\lambda'-\lambda)] + \\
& + \frac{\xi'\,\eta'}{\Delta'\,\Delta_0^3}[-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\,a'^2\sin 2\lambda') - \\
& - \tfrac{9}{4}\,a\,a'\sin(3\lambda'-\lambda)] + \\
& + \frac{\xi\,\xi'}{\sqrt{\Delta\,\Delta'}\,\Delta_0^3}[\tfrac{9}{4}\,a\,a' - \tfrac{3}{4}\,a\,a'\cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\,a\,a'\cos 2\lambda' + \\
& + \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(2\lambda-2\lambda')] +
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+ \frac{\eta\,\eta'}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{9}{4}\,a\,a' + \tfrac{3}{4}\,a\,a'\cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\,a\,a'\cos 2\lambda' +\right.\\
&\left. + \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(2\lambda - 2\lambda')\right] +\\
&+ \frac{\xi\,\eta'}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda + \tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda' +\right.\\
&\left. + \tfrac{1}{4}\,a\,a'\sin(2\lambda - 2\lambda')\right] +\\
&+ \frac{\xi'\,\eta}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda +\right.\\
&\left. + \tfrac{1}{4}\,a\,a'\sin(2\lambda' - 2\lambda)\right] +\\
&+ \frac{p^2}{\varDelta\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{q^2}{\varDelta\,\varDelta_0^{\,3}}\left[-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p\,q}{\varDelta\,\varDelta_0^{\,3}}\left[-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda + \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p'^2}{\varDelta'\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{q'^2}{\varDelta'\,\varDelta_0^{\,3}}\left[-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p'\,q'}{\varDelta'\,\varDelta_0^{\,3}}\left[-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda + \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p\,p'}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{q\,q'}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p\,q'}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda - \lambda')\right] +\\
&+ \frac{p'\,q}{\sqrt{\varDelta\,\varDelta'}\,\varDelta_0^{\,3}}\left[\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda' + \lambda) + \tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda' - \lambda)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Die Entwickelung von $\overset{-1}{r_{ab}}$ wird dadurch charakterisirt, dass die Coefficienten in der Entwickelung dieser Grösse nach den Potenzen von ξ, η u. s. w. ganze rationale Functionen von $1 : \varDelta_0$ werden. In der Entwickelung der übrigen Glieder der Störungs-

function tritt aber diese Grösse Δ_0 nicht auf. Es ist aus diesem Grunde, der Uebersichtlichkeit wegen, geeignet, die Störungsfunction in zwei Theile zu trennen: den sog. *principalen Theil* F_1

$$F_1 = \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}}, \tag{18*}$$

und den *complementären Theil* F_2

$$F_2 = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} - \frac{k^2 m_a m_b}{r^3_{ga}} (q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3'), \tag{18**}$$

so dass

$$F = F_1 + F_2, \tag{18}$$

und man erhält

$$\left\{\begin{aligned}
F_1 = m_a m_b \Big[\frac{1}{\Delta_0} + {} \\
+ \xi \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{A}} \{a^2 \cos\lambda - \tfrac{3}{2} a a' \cos\lambda' + \tfrac{1}{2} a a' \cos(2\lambda - \lambda')\} + {} \\
+ \eta \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{A}} \{- a^2 \sin\lambda + \tfrac{3}{2} a a' \sin\lambda' - \tfrac{1}{2} a a' \sin(2\lambda - \lambda')\} + {} \\
+ \xi' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{A'}} \{a'^2 \cos\lambda' - \tfrac{3}{2} a a' \cos\lambda + \tfrac{1}{2} a a' \cos(2\lambda' - \lambda)\} + {} \\
+ \eta' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{A'}} \{- a'^2 \sin\lambda' + \tfrac{3}{2} a a' \sin\lambda - \tfrac{1}{2} a a' \sin(2\lambda' - \lambda)\} + {} \\
+ \xi^2 \frac{1}{A} \Big\{\frac{1}{\Delta_0^3} [- \tfrac{3}{4} a^2 + \tfrac{1}{8} a a' \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} a a' \cos(\lambda - \lambda') + {} \\
+ \tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda + \tfrac{3}{8} a a' \cos(3\lambda - \lambda')] + {} \\
+ \frac{1}{\Delta_0^5} [\tfrac{3}{4} a^4 + \tfrac{15}{8} a^2 a'^2 - \tfrac{9}{4} a^3 a' \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2} a^3 a' \cos(\lambda - \lambda') + {} \\
+ \tfrac{3}{4} a^4 \cos 2\lambda - \tfrac{9}{8} a^2 a'^2 \cos 2\lambda + \tfrac{27}{16} a^2 a'^2 \cos 2\lambda' - {} \\
- \tfrac{9}{8} a^2 a'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \tfrac{3}{4} a^3 a' \cos(3\lambda - \lambda') + {} \\
+ \tfrac{3}{16} a^2 a'^2 \cos(4\lambda - 2\lambda')]\Big\} + {} \\
+ \eta^2 \frac{1}{A} \Big\{\frac{1}{\Delta_0^3} [- \tfrac{3}{4} a^2 - \tfrac{1}{8} a a' \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} a a' \cos(\lambda - \lambda') - {} \\
- \tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{8} a a' \cos(3\lambda - \lambda')] + {}
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$
(19)\quad\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\varDelta_0^{\,5}}\big[\tfrac{3}{4}a^4+\tfrac{15}{8}a^2a'^2+\tfrac{9}{4}a^3a'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{3}{2}a^3a'\cos(\lambda-\lambda')+\\
&+\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda-\tfrac{3}{4}a^4\cos 2\lambda-\tfrac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda'-\\
&-\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda-2\lambda')-\tfrac{3}{4}a^3a'\cos(3\lambda-\lambda')-\\
&-\tfrac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda-2\lambda')\big]\Big\}+\\
&+\xi\eta\,\frac{1}{\varDelta}\Big\{\frac{1}{\varDelta_0^{\,3}}\big[-\tfrac{1}{4}aa'\sin(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{2}a^2\sin 2\lambda-\\
&\qquad\qquad-\tfrac{3}{4}aa'\sin(3\lambda-\lambda')\big]+\\
&+\frac{1}{\varDelta_0^{\,5}}\big[\tfrac{9}{2}a^3a'\sin(\lambda+\lambda')-\tfrac{3}{2}a^4\sin 2\lambda+\tfrac{9}{4}a^2a'^2\sin 2\lambda-\\
&-\tfrac{27}{8}a^2a'^2\sin 2\lambda'-\tfrac{3}{2}a^3a'\sin(3\lambda-\lambda')-\\
&-\tfrac{3}{8}a^2a'^2\sin(4\lambda-2\lambda')\big]\Big\}+\\
&+\xi'^2\,\frac{1}{\varDelta'}\Big\{\frac{1}{\varDelta_0^{\,3}}\big[-\tfrac{3}{4}a'^2+\tfrac{1}{8}aa'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')+\\
&\qquad\qquad+\tfrac{1}{4}a'^2\cos 2\lambda'+\tfrac{3}{8}aa'\cos(3\lambda'-\lambda)\big]+\\
&+\frac{1}{\varDelta_0^{\,5}}\big[\tfrac{3}{4}a'^4+\tfrac{15}{8}a^2a'^2-\tfrac{9}{4}aa'^3\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{3}{2}aa'^3\cos(\lambda-\lambda')+\\
&+\tfrac{3}{4}a'^4\cos 2\lambda'-\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda'+\tfrac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda-\\
&-\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda'-2\lambda)+\tfrac{3}{4}aa'^3\cos(3\lambda'-\lambda)+\\
&+\tfrac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda'-2\lambda)\big]\Big\}+\\
&+\eta'^2\,\frac{1}{\varDelta'}\Big\{\frac{1}{\varDelta_0^{\,3}}\big[-\tfrac{3}{4}a'^2-\tfrac{1}{8}aa'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{2}aa'\cos(\lambda-\lambda')-\\
&\qquad\qquad-\tfrac{1}{4}a'^2\cos 2\lambda'-\tfrac{3}{8}aa'\cos(3\lambda'-\lambda)\big]+\\
&+\frac{1}{\varDelta_0^{\,5}}\big[\tfrac{3}{4}a'^4+\tfrac{15}{8}a^2a'^2+\tfrac{9}{4}aa'^3\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{3}{2}aa'^3\cos(\lambda-\lambda')-\\
&-\tfrac{3}{4}a'^4\cos 2\lambda'+\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos 2\lambda'-\tfrac{27}{16}a^2a'^2\cos 2\lambda-\\
&-\tfrac{9}{8}a^2a'^2\cos(2\lambda'-2\lambda)-\tfrac{3}{4}aa'^3\cos(3\lambda'-\lambda)-\\
&-\tfrac{3}{16}a^2a'^2\cos(4\lambda'-2\lambda)\big]\Big\}+
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \xi' \eta' \frac{1}{\Delta'} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[- \tfrac{1}{4}\, a\, a' \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2}\, a'^2 \sin 2\lambda' - \right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad - \tfrac{3}{4}\, a\, a' \sin(3\lambda' - \lambda) \Big] + \\
&+ \frac{1}{\Delta_0^5} \Big[\tfrac{9}{2}\, a\, a'^3 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2}\, a'^4 \sin 2\lambda' + \tfrac{9}{4}\, a^2 a'^2 \sin 2\lambda' - \\
&- \tfrac{27}{8}\, a^2 a'^2 \sin 2\lambda - \tfrac{3}{2}\, a\, a'^3 \sin(3\lambda' - \lambda) - \\
&\left.\left. - \tfrac{3}{8}\, a^2 a'^2 \sin(4\lambda' - 2\lambda) \right] \right\} + \\
&+ \frac{\xi \xi'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[\tfrac{9}{4}\, a\, a' - \tfrac{3}{4}\, a\, a' \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\, a\, a' \cos 2\lambda' + \right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{4}\, a\, a' \cos(2\lambda - 2\lambda') \Big] + \\
&+ \frac{1}{\Delta_0^5} \Big[- \tfrac{9}{4}\, a\, a'^3 - \tfrac{9}{4}\, a^3 a' + \tfrac{21}{4}\, a^2 a'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \\
&+ \tfrac{21}{8}\, a^2 a'^2 \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{9}{4}\, a^3 a' \cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\, a\, a'^3 \cos 2\lambda - \\
&- \tfrac{9}{4}\, a\, a'^3 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\, a^3 a' \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\, a\, a'^3 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \\
&+ \tfrac{3}{4}\, a^3 a' \cos(2\lambda - 2\lambda') - \tfrac{9}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda - \lambda') - \\
&\left.\left. - \tfrac{9}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda - 3\lambda') \right] \right\} + \\
&+ \frac{\eta \eta'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[\tfrac{9}{4}\, a\, a' + \tfrac{3}{4}\, a a' \cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\, a a' \cos 2\lambda' + \right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{4}\, a\, a' \cos(2\lambda - 2\lambda') \Big] + \\
&+ \frac{1}{\Delta_0^5} \Big[- \tfrac{9}{4}\, a^3 a' - \tfrac{9}{4}\, a\, a'^3 - \tfrac{21}{4}\, a^2 a'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \\
&+ \tfrac{21}{8}\, a^2 a'^2 \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{9}{4}\, a^3 a' \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\, a\, a'^3 \cos 2\lambda + \\
&+ \tfrac{9}{4}\, a\, a'^3 \cos 2\lambda' - \tfrac{3}{4}\, a^3 a' \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\, a^3 a' \cos(2\lambda - 2\lambda') + \\
&+ \tfrac{3}{4}\, a\, a'^3 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \tfrac{9}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda - \lambda') + \\
&\left.\left. + \tfrac{9}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{8}\, a^2 a'^2 \cos(3\lambda - 3\lambda') \right] \right\} + \\
&+ \frac{\xi \eta'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} \left\{ \frac{1}{\Delta_0^3} \left[\tfrac{3}{4}\, a\, a' \sin 2\lambda + \tfrac{3}{4}\, a\, a' \sin 2\lambda' + \right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{4}\, a\, a' \sin(2\lambda - 2\lambda') \Big] +
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{21}{4}\,a^2a'^2\sin(\lambda+\lambda')-\tfrac{33}{8}\,a^2a'^2\sin(\lambda-\lambda')+\\
&+\tfrac{9}{4}\,a^3a'\sin 2\lambda-\tfrac{3}{4}\,a\,a'^3\sin 2\lambda+\tfrac{9}{4}\,a\,a'^3\sin 2\lambda'-\\
&-\tfrac{3}{4}\,a^3a'\sin 2\lambda'+\tfrac{3}{4}\,a^3a'\sin(2\lambda-2\lambda')+\tfrac{3}{4}\,a\,a'^3\sin(2\lambda-2\lambda')+\\
&+\tfrac{9}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda-\lambda')+\tfrac{9}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda'-\lambda)+\\
&+\tfrac{3}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\}+\\
&+\frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Delta\Delta'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda+\tfrac{3}{4}\,a\,a'\sin 2\lambda'+\\
&\qquad\qquad\qquad+\tfrac{1}{4}\,a\,a'\sin(2\lambda'-2\lambda)\Big]+\\
&+\frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{21}{4}\,a^2a'^2\sin(\lambda+\lambda')-\tfrac{33}{8}\,a^2a'^2\sin(\lambda'-\lambda)+\\
&+\tfrac{9}{4}\,a\,a'^3\sin 2\lambda'-\tfrac{3}{4}\,a^3a'\sin 2\lambda'+\tfrac{9}{4}\,a^3a'\sin 2\lambda-\\
&-\tfrac{3}{4}\,a\,a'^3\sin 2\lambda+\tfrac{3}{4}\,a\,a'^3\sin(2\lambda'-2\lambda)+\\
&+\tfrac{3}{4}\,a^3a'\sin(2\lambda'-2\lambda)+\tfrac{9}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda'-\lambda)+\\
&+\tfrac{9}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda-\lambda')+\tfrac{3}{8}\,a^2a'^2\sin(3\lambda'-3\lambda)\Big]\Big\}+\\
&+p^2\frac{1}{\Delta_0^3\Delta}\{\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+q^2\frac{1}{\Delta_0^3\Delta}\{-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+pq\frac{1}{\Delta_0^3\Delta}\{-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda')\}+\\
&+p'^2\frac{1}{\Delta_0^3\Delta'}\{\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+q'^2\frac{1}{\Delta_0^3\Delta'}\{-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+p'q'\frac{1}{\Delta_0^3\Delta'}\{-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda')\}+\\
&+pp'\frac{1}{\Delta_0^3\sqrt{\Delta\Delta'}}\{-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+qq'\frac{1}{\Delta_0^3\sqrt{\Delta\Delta'}}\{\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\,a\,a'\cos(\lambda-\lambda')\}+\\
&+pq'\frac{1}{\Delta_0^3\sqrt{\Delta\Delta'}}\{\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda-\lambda')\}+\\
&+p'q\frac{1}{\Delta_0^3\sqrt{\Delta\Delta'}}\{\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{2}\,a\,a'\sin(\lambda-\lambda')\}\Big].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
(20)\quad\left\{
\begin{aligned}
F_2 = {} & \frac{k^2 m_b m_c}{2a} + \frac{k^2 m_a m_c}{2a'} + m_a m_b \frac{a a'}{a^3} \Big\{ - \cos(\lambda - \lambda') + \\
& + \frac{\xi}{\sqrt{\varDelta}} [- 2 \cos(2\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{\eta}{\sqrt{\varDelta}} [2 \sin(2\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{\xi'}{\sqrt{\varDelta'}} [\tfrac{3}{2} \cos \lambda - \tfrac{1}{2} \cos(2\lambda' - \lambda)] + \\
& + \frac{\eta'}{\sqrt{\varDelta'}} [- \tfrac{3}{2} \sin \lambda + \tfrac{1}{2} \sin(2\lambda' - \lambda)] + \\
& + \frac{\xi^2}{\varDelta} [- \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{27}{8} \cos(3\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{\eta^2}{\varDelta} [\tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{27}{8} \cos(3\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{\xi\eta}{\varDelta} [\tfrac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{27}{4} \sin(3\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{\xi'^2}{\varDelta'} [- \tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda)] + \\
& + \frac{\eta'^2}{\varDelta'} [\tfrac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{8} \cos(3\lambda' - \lambda)] + \\
& + \frac{\xi'\eta'}{\varDelta'} [\tfrac{1}{4} \sin(\lambda + \lambda') \qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{3}{4} \sin(3\lambda' - \lambda)] + \\
& + \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}} [3 \cos 2\lambda - \cos(2\lambda - 2\lambda')] + \\
& + \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}} [- 3 \cos 2\lambda - \cos(2\lambda - 2\lambda')] + \\
& + \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}} [- 3 \sin 2\lambda - \sin(2\lambda - 2\lambda')] + \\
& + \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}} [- 3 \sin 2\lambda - \sin(2\lambda' - 2\lambda)] + \\
& + \frac{p^2}{\varDelta} [- \tfrac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{q^2}{\varDelta} [\tfrac{1}{4} \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4} \cos(\lambda - \lambda')] + \\
& + \frac{pq}{\varDelta} [\tfrac{1}{2} \sin(\lambda + \lambda')] +
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(20) \quad \left\{
\begin{aligned}
&+ \frac{p'^2}{A'}\left[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{q'^2}{A'}\left[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{p'q'}{A'}\left[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda')\right] + \\
&+ \frac{pp'}{\sqrt{AA'}}\left[\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{qq'}{\sqrt{AA'}}\left[-\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{pq'}{\sqrt{AA'}}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-\lambda')\right] + \\
&+ \frac{p'q}{\sqrt{AA'}}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda'+\lambda) - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda'-\lambda)\right]\Big\} .
\end{aligned}
\right.
$$

Die obige Entwickelung der Störungsfunction bis zu den Gliedern zweiten Grades in ξ, η, p, q, ξ' u. s. w. ist von den Herren G. NORÉN und J. A. WALLBERG ausgeführt worden.[1]

In den obigen Ausdrücken sind die halben grossen Achsen a und a' der osculirenden Ellipsen in die Coefficienten eingeführt statt der canonischen Elemente A und A'. Man hat nun

$$
(21) \quad \left\{
\begin{aligned}
a &= \frac{A^2}{\beta^2}, \\
a' &= \frac{A'^2}{\beta'^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 4. Principien der Störungstheorie.

Die Differentialgleichungen für die canonischen Elemente lauten:

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial A}, \\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p}, \\
\frac{dA'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial A'}
\end{aligned}
\right.
$$

u. s. w.,

[1] Meddelanden från Lunds Observatorium. Nr. 10.

und nach den Auseinandersetzungen der vorigen Paragraphen kann man die Störungsfunction F in folgender Form schreiben:

$$(1^*)\ F = \sum A_{ijkl}^{i'j'k'l'} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^i \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^j \left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^k \left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^l \left(\frac{\xi'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{i'} \left(\frac{\eta'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{j'} \left(\frac{p'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{k'} \left(\frac{q'}{\sqrt{\Lambda'}}\right)^{l'},$$

wo die ganzen Zahlen i, j, k, l, i', j', k' und l' die Werthe $0, 1, 2, \ldots, \infty$ annehmen. Die Coefficienten A sind von Λ, λ, Λ' und λ' abhängig.

Die strenge Integration dieser Differentialgleichungen ist bis jetzt nicht gelungen, trotz den fortgesetzten Bemühungen der grössten Mathematiker der letzten 150 Jahre. Man weiss nicht, ob die Schwankungen der halben grossen Achsen der osculirenden Ellipsen für alle Zeiten innerhalb endlicher Grenzen bleiben, und es ist auch nicht bekannt, wie weit die Elemente ξ, η, p, q, ξ' u. s. w. sich von den kleinen Werthen, welche dieselben jetzt in unserem Planetensystem besitzen, mit der Zeit entfernen können. Der sog. Stabilitätsbeweis von Laplace, auf den wir unten zurückkommen wollen, versagt in Bezug auf den *strengen* Nachweis, dass die Schwankungen von Λ und Λ' immer klein bleiben müssen, und sagt nur aus — was zwar einen höchst wichtigen Beitrag zu der Stabilitätsfrage enthält — dass, wenn die Schwankungen von Λ und Λ' klein sind, dies auch mit ξ, η u. s. w. der Fall sein muss.

Obgleich es also bis jetzt nicht gelungen ist, die grossen Rätsel des Problems der drei Körper zu entziffern, so liegt die Sache ganz anders, wenn es sich nur darum handelt, die Bahnen von drei oder mehreren Körpern, welche sich nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, für eine *beschränkte* Zeit zu untersuchen. Wie die Massen und die Anfangsbedingungen auch beschaffen sein mögen, lassen sich dann die Werthe der Elemente, beispielsweise durch sog. *mechanische Quadratur*, beliebig genau berechnen. Wenn, im Besonderen, eine von den Massen sehr gross ist im Verhältniss zu den übrigen, wie es in dem Planetensystem der Fall ist, so kann diese Berechnung mit *analytischen* Methoden ausgeführt werden, und zwar lassen sich mit verhältnissmässig kleiner Mühe allgemeine Ausdrücke für die Elemente (oder die Coordinaten) ableiten,

welche für Hunderte oder gar Tausende von Jahren die wahren Bahnen der Körper mit genügender Genauigkeit wiedergeben.

Die Methode, welche man zu diesem Zweck seit der Mitte des 18ten Jahrhunderts am häufigsten angewandt hat, wird mit dem Namen der *Störungstheorie* bezeichnet.

Betrachten wir die Form § 3 (13) für die Störungsfunction, welche wir folgendermaassen

$$(2)\qquad \begin{cases} F = \dfrac{k^2 m_b m_c}{2a} + \dfrac{k^2 m_a m_c}{2a'} + \\ \dfrac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \dfrac{k^2 m_a m_b}{r^3_{ga}}(q_1 q_1' + q_2 q_2' + q_3 q_3') \end{cases}$$

schreiben können, und nehmen wir an, dass die Massen m_a und m_b sehr klein sind im Verhältniss zu der Masse m_c, so findet man, dass die beiden letzten Glieder in diesem Ausdruck mit dem Product der kleinen Massen m_a und m_b multiplicirt sind, was man kurz so ausdrückt, dass diese Glieder von der *zweiten Ordnung* (in Bezug auf die Massen) sind. Die beiden ersten Glieder in F, welche wir mit F_0 bezeichnen wollen, so dass

$$(3)\qquad F_0 = \frac{k^2 m_b m_c}{2a} + \frac{k^2 m_a m_c}{2a'},$$

sind dagegen offenbar nur von der *ersten* Ordnung.

In den partiellen Ableitungen von F, welche in (1) vorkommen, geht F_0 nur in den Differentialquotienten nach $\varDelta$ und $\varDelta'$ ein (man hat $\varDelta = \beta\sqrt{a}$, $\varDelta' = \beta'\sqrt{a'}$), welche die Differentiale der mittleren Längen λ und λ' geben.

Sehen wir nun vorläufig von den Elementen $\varDelta$ und λ, $\varDelta'$ und λ' ab, und führen die Bezeichnungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{\beta}\,(\xi), \quad \eta = \sqrt{\beta}\,(\eta), \\ p = \sqrt{\beta}\,(p), \quad q = \sqrt{\beta}\,(q), \\ \xi' = \sqrt{\beta'}\,(\xi') \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ein, so erhalten wir statt (1) die Differentialgleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} \beta \dfrac{d(\xi)}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial(\eta)}, & \beta \dfrac{d(\eta)}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial(\xi)}, \\ \beta \dfrac{d(p)}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial(q)}, & \beta \dfrac{d(q)}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial(p)}, \\ \beta' \dfrac{d(\xi')}{dt} = \dfrac{\partial F}{d(\eta')} & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wird noch

$$(4^*)\qquad \varDelta = \beta(\varDelta), \qquad \varDelta' = \beta'(\varDelta')$$

gesetzt, so nimmt F nach (1*) folgende Form an:

$$F = \sum A\left(\frac{(\xi)}{\sqrt{(\varDelta)}}\right)^i \left(\frac{(\eta)}{\sqrt{(\varDelta)}}\right)^j \cdots\cdots,$$

wo in (1*) überall $(\varDelta)$, (ξ), (η) u. s. w. statt $\varDelta$, ξ, η u. s. w. geschrieben wird.

Hieraus folgt, dass sämmtliche partiellen Ableitungen, welche in (5) vorkommen, mit dem Product der kleinen Massen m_a und m_b multiplicirt sind.

Nun ist aber genähert nach § 3 (2)

$$(6)\qquad \begin{cases} \beta = k\, m_b \sqrt{m_c}, \\ \beta' = k\, m_a \sqrt{m_c}, \end{cases}$$

so dass die Ausdrücke für die Differentialquotienten von (ξ), (η), (p) und (q) mit der „störenden“ Masse m_a multiplicirt erscheinen, und die Differentialquotienten der Elemente (ξ') u. s. w. mit der Masse m_b. Da nun diese Massen als sehr klein angenommen werden, so folgt hieraus, dass *die Differentialquotienten der Elemente* (ξ), (η) *u. s. w. klein sind.*

Auf dieser Eigenschaft ist nun die *Störungstheorie* aufgebaut. Wenn die Differentialquotienten klein sind, so sind auch, wenigstens für kürzere Zeit, die Veränderungen der Elemente klein, und man kann in der ersten Annäherung für (ξ), (η) u. s. w. in der rechten Seite von (5) *constante* Werthe für dieselben annehmen. Durch die Integration der so erhaltenen Gleichungen, welche nun keine

Schwierigkeiten darbietet, erhält man die *Störungen erster Ordnung*, und wird diese Annäherungsmethode fortgesetzt, so entsteht eine *Entwickelung nach den Potenzen der Massen.* Neuere Untersuchungen haben zwar gezeigt, dass diese Reihenentwickelungen nicht unbedingt convergent sind.[1] Sowohl die Theorie wie die Erfahrung haben indessen dargethan, dass die Reihen für *endliche* Zeiten convergiren und zu numerischen Berechnungen brauchbar sind.

In Bezug auf die Differentialgleichungen für $(\varDelta)$ und $(\varDelta')$ gelten die obigen Auseinandersetzungen unverändert, so dass man, wenigstens wenn die Störungen der ersten Ordnung allein berücksichtigt werden, annehmen kann, dass

$$(7) \qquad \begin{cases} (\varDelta) = (\varDelta_0) + \delta\varDelta, \\ (\varDelta') = (\varDelta_0') + \delta\varDelta', \end{cases}$$

wo $(\varDelta_0)$ und $(\varDelta_0')$ zwei constante Werthe bezeichnen und $\delta\varDelta$, $\delta\varDelta'$ klein sind.

Betrachten wir nun endlich die Differentialgleichungen für die mittlere Länge,

$$(8) \qquad \begin{cases} \beta\,\dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial(\varDelta)}, \\ \beta'\,\dfrac{d\lambda'}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial(\varDelta')}, \end{cases}$$

so brauchen wir in F nur diejenigen Glieder, welche von F_0 herrühren, zu betrachten. Es ist nun nach (3)

$$(8^*) \qquad F_0 = \frac{k^2 m_b m_c}{2(\varDelta)^2} + \frac{k^2 m_a m_c}{2(\varDelta')^2},$$

und also hat man

$$(9) \qquad \begin{cases} \beta\,\dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{k^2 m_b m_c}{(\varDelta)^3}, \\ \beta'\,\dfrac{d\lambda'}{dt} = \dfrac{k^2 m_a m_c}{(\varDelta')^3}, \end{cases}$$

---

[1] Der Beweis hierfür wird im zweiten Theil dieser Vorlesungen gegeben.

oder, wenn man die Relationen (6) berücksichtigt,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta)^3}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda'}{dt} = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{\varDelta'^3}. \end{cases}$$

Setzt man hier die Werthe (7) ein, und entwickelt nach den kleinen Grössen $\delta\varDelta$ und $\delta\varDelta'$, so wird

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0)^3} - 3\dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0)^3}\cdot\dfrac{\delta\varDelta}{(\varDelta_0)}, \\[2ex] \dfrac{d\lambda'}{dt} = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0')^3} - 3\dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0)^3}\cdot\dfrac{\delta\varDelta'}{(\varDelta_0')}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(12)\quad \begin{cases} n_0 = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0)^3}, \\[2ex] n_0' = \dfrac{k\sqrt{m_c}}{(\varDelta_0')^3}, \end{cases}$$

wo n_0 und n_0' also *constante* Grössen bezeichnen, so bekommt man aus (11) nach der Integration

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda = n_0\,(t+\gamma_0) - 3n_0\displaystyle\int\frac{\delta\varDelta}{(\varDelta_0)}\,dt, \\[2ex] \lambda' = n_0'(t+\gamma_0') - 3n_0\displaystyle\int\frac{\delta\varDelta'}{(\varDelta_0')}\,dt, \end{cases}$$

wo γ_0 und γ_0' Integrationsconstanten bezeichnen, und man findet hieraus, dass die Differenzen $\lambda - n_0(t+\gamma_0)$ und $\lambda' - n_0'(t+\gamma_0')$ mit der ersten Potenz der Massen multiplicirt sind und demnach, nach der Terminologie der Störungstheorie, *kleine Grössen von der ersten Ordnung sind.* Wir bezeichnen diese Differenzen mit $\delta\lambda$ und $\delta\lambda'$.

Die Integrationsmethode in der Störungstheorie ist nun die folgende.

Es bedeute E irgend eines von den Elementen, wobei wir $\delta\lambda$ und $\delta\lambda'$ statt λ und λ' als Elemente benutzen, dann hat man für dieses eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dE}{dt} = f(A, \lambda, \xi, \eta, p, q; A', \lambda', \xi', \eta', p', q').$$

Von der Function f wissen wir nach IV § 8, dass sie in λ und λ' periodisch ist, und wir können also schreiben:

$$\frac{dE}{dt} = \sum B^{(i,i')} \cos(i\lambda + i'\lambda' + D^{(i,i')}). \tag{14}$$

Für jedes Element besteht eine Gleichung von dieser Form. Die rechte Seite von (14) ist immer mit einer kleinen Masse multiplicirt und also klein. Um die *Störungen der ersten Ordnung* zu erhalten, setzen wir nun in der rechten Seite von (14)

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 = n_0\,(t + \gamma_0), \\ \lambda' &= \lambda_0' = n_0'(t + \gamma_0'), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

und für die übrigen Elemente A, ξ, η u. s. w. werden constante Werthe A_0, ξ_0, η_0 u. s. w. gesetzt. Die Gleichung (14) geht dann in

$$\frac{dE}{dt} = \sum B_0^{(i,i')} \cos(i\lambda_0 + i'\lambda_0' + D_0^{(i,i')}) \tag{16}$$

über, wo $B_0^{(i,i')}$ und $D_0^{(i,i')}$ von der Zeit unabhängige Werthe haben. Die Gleichung (16) kann man dann unmittelbar integriren. Sehen wir von der Convergenzfrage ab, welche in einem der folgenden Abschnitte näher untersucht wird, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E = &\sum \frac{B^{(i,i')}}{i n_0 + i' n_0'} \sin(i\lambda_0 + i'\lambda_0' + D_0^{(i,i')}) \\ &+ Ct \\ &+ E_0, \end{aligned} \tag{17}$$

wo C dasjenige Glied in (16) bedeutet, für welches $i = i' = 0$ ist, und E_0 die Integrationsconstante bezeichnet.

Die Elementenwerthe A_0, γ_0, ξ_0 u. s. w. werden gewöhnlich so gewählt, dass sie für eine bestimmte Zeit — die sog. *Epoche* — ein *osculirendes* Elementensystem bilden. Die Integrationsconstante E_0 wird in dem Falle so bestimmt, dass der aus (17) hervorgehende Werth von E für die Epoche gleich dem angenommenen Werth des osculirenden Elementes wird.

Der Ausdruck (17) für ein Element besteht aus zwei qualitativ verschiedenen Theilen:

1) das Glied Ct, das man die *secularen* Störungen des Elementes nennt;

2) die Glieder $\sum \frac{B}{in_0 + i'n_0'} \sin(i\lambda + i'\lambda_0' + D)$, welche *periodische* Störungen genannt werden.

Die *secularen* Störungen — insofern man sie durch die Störungen der *ersten* Ordnung erhält — wachsen mit der Zeit über alle Grenzen. Es ist indessen zu bemerken, dass C mit der störenden Masse multiplicirt ist und also eine sehr kleine Zahl ist, so das der Zuwachs der Elemente auf Grund dieser Glieder sehr langsam vor sich geht. Werden die Glieder höherer Ordnung in Betracht gezogen, so zeigt es sich, obgleich die mathematische Behandlung des Problems nicht einwurfsfrei ist, dass die secularen Glieder thatsächlich nicht unbegrenzt wachsen, sondern periodischen Schwankungen, von verhältnissmässig grosser Amplitude und sehr langer Periode, unterliegen. Wir werden diese Frage im nächsten Abschnitt ausführlich untersuchen.

Die *periodischen* Störungen erster Ordnung sind durch die Reihe

$$\sum \frac{B}{in_0 + i'n_0'} \sin(i\lambda_0 + i'\lambda_0' + D) \tag{18}$$

gegeben, wo die Werthe $i = i' = 0$ auszuschliessen sind.

Folgende Eigenschaften dieser Reihe verdienen besonders hervorgehoben zu werden.

1) Wenn die Summe

$$\sum \left| \frac{B^{(i,\,i')}}{in_0 + i'n_0'} \right|$$

endlich ist, so können die periodischen Störungen eine endliche obere Grenze nicht überschreiten;

2) Jedes Glied in (18) ist periodisch und nimmt nach einer bestimmten Zeit wieder seinen ursprünglichen Werth an, wenn nicht

3) $i n_0 + i' n_0' = 0$, d. h. die mittleren osculirenden Bewegungen der beiden Planeten commensurabel sind. Ein solcher Fall ist zwar nicht für zwei Planeten bekannt, dagegen kommt er im System der Jupitersatelliten vor, wo die mittleren Bewegungen von drei Satelliten commensurabel sind, und, wie LAPLACE gezeigt hat, auch immer commensurabel bleiben. Tritt dieser Fall ein, so muss die Differentialgleichung (14) in anderer Weise behandelt werden, als oben geschehen ist;

4) Bei beliebigen Werthen für n_0 und n_0', die *nicht* commensurabel sind, können die Zahlen i und i' immer so gewählt werden, dass $i n_0 + i' n_0'$ beliebig klein wird. Die Glieder, welche diesen Werthen von i und i' entsprechen, können unter Umständen eine beträchtliche Grösse erreichen. Solche sog. *kleine Divisoren* spielen in der Störungstheorie eine wichtige Rolle, und verursachen, sowohl vom theoretischen wie vom praktischen Gesichtspunkte, die grössten Schwierigkeiten bei der Untersuchung der Bewegungen der Planeten.

Die Bedeutung dieser Glieder wurde zuerst von LAPLACE entdeckt, der durch sie eine durch die Beobachtungen erwiesene Ungleichheit in der Bewegung von Jupiter und Saturn theoretisch erklärte.

Beispiel 1. Die tägliche mittlere Bewegung n_0 für Jupiter ist 299″.1 und für Saturn $n_0' = 120''.5$. Hieraus findet man, dass

$$2 n_0 - 5 n_0' = - 4''.3 ,$$

so dass dieser kleine Divisor 70 mal kleiner als die mittlere Bewegung von Jupiter ist und 28 mal kleiner als die mittlere Bewegung von Saturn. Das entsprechende Glied in (18) wird hierdurch bei Jupiter 70 mal, bei Saturn 28 mal „vergrössert". Nach (13) werden für die *mittlere Länge zwei Integrationen* nothwendig, und bei der zweiten Integration tritt der betreffende kleine Divisor nochmals im Nenner auf. Das so entstandene Glied wird gewöhnlich die *grosse Ungleichheit* in der Bewegung von Jupiter und Saturn genannt. Ihre Periode ist $\frac{360^\circ}{4''.3} = 860$ Jahre.

Beispiel 2. Der kleine Planet (17) Thetis hat eine mittlere Bewegung n_0 von 912″.8. Betrachtet man die Störungen dieses Planeten von Jupiter ($n' = 299''.1$), so findet man, dass

$$n_0 - 3n_0' = 15''.5,$$

so dass dieser kleine Divisor 59 mal kleiner als n_0 ist. Das entsprechende Glied in (18) wird demnach 59 mal vergrössert, und in der mittleren Länge durch die doppelte Integration 3480 fach vergrössert. Hierdurch entsteht in der mittleren Länge eine Störung, die sich zu dem ungewöhnlich hohen Betrag von 4°35′ beläuft. Die Periode beträgt 240 Jahre.

§ 5. Coefficienten von Laplace.

Die Störungsfunction ist eine periodische Function von λ und λ' und kann in eine Fourier'sche Reihe nach den Vielfachen dieser Winkelgrössen entwickelt werden. Diese Entwickelung lässt sich leicht aus der Entwickelung der negativen Potenzen von $\Delta_0 = [a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\lambda - \lambda')]^{1/2}$, nach den Vielfachen von $\lambda - \lambda'$, ableiten. Die letztgenannte Entwickelung spielt deswegen in der Störungstheorie eine wichtige Rolle, und wir wollen sie hier näher betrachten.

Werden in der Störungsfunction nur die Glieder bis zum zweiten Grade[1] inclusive betrachtet, so muss man die Entwickelungen von Δ_0^{-1}, Δ_0^{-3} und Δ_0^{-5} kennen, und wir setzen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_0} = \tfrac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\[2ex] \dfrac{aa'}{\Delta_0^3} = \tfrac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\[2ex] \dfrac{a^2a'^2}{\Delta_0^5} = \tfrac{1}{2}\sum C_i \cos i(\lambda - \lambda'). \end{cases}$$

[1] Es ist in der Astronomie bisweilen gebräuchlich, zwischen den Begriffen *Ordnung* eines Gliedes und *Grad* eines Gliedes in der Weise zu unterscheiden, dass man von der Ordnung in Bezug auf die *Massen* und vom Grad in Bezug auf die *Excentricitäten* und die *Neigungen* spricht. Wenn nichts Anderes ausdrücklich erwähnt ist, habe ich diesen Unterschied in den Vorlesungen beobachtet.

Die *Coefficienten von Laplace* $L_i^{(s)}$ werden wir durch folgende Gleichung definiren:

$$(2)\qquad \left(\frac{a'}{\Delta_0}\right)^{2s} = \frac{1}{[1+\alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda-\lambda')]^s} = \tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} L_i^{(s)} \cos i(\lambda-\lambda'),$$

wo $L_{-i}^{(s)} = L_i^{(s)}$ und

$$(3)\qquad \alpha = \frac{a}{a'}.$$

Hieraus bekommt man die Relationen:

$$(4)\qquad \begin{cases} a' A_i = L_i^{(1/2)}, \\ a' B_i = \alpha\, L_i^{(3/2)}, \\ a' C_i = \alpha^2 L_i^{(5/2)}. \end{cases}$$

Einen analytischen Ausdruck für $L_i^{(s)}$ kann man in folgender Weise ableiten.

Setzt man

$$e^{\sqrt{-1}\,(\lambda-\lambda')} = z,$$

so ist

$$2\cos(\lambda-\lambda') = z + z^{-1},$$

$$2\cos i(\lambda-\lambda') = z^i + z^{-i},$$

$$(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1}) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda-\lambda'),$$

und folglich

$$(5)\qquad \left(1-\alpha z\right)^{-s}\left(1-\alpha z^{-1}\right)^{-s} = \tfrac{1}{2}\sum L_i^{(s)} z^i.$$

Jeder Factor der linken Seite lässt sich für $\alpha < 1$ nach Potenzen von α entwickeln. Werden die so erhaltenen Reihen mit einander multiplicirt, und setzt man die Coefficienten von z^i rechts und links einander gleich, so bekommt man

$$(6)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2} L_i = \dfrac{s(s+1)\ldots(s+i-1)}{\underline{|i}}\,\alpha^i \Big[1 + \dfrac{s}{1}\cdot\dfrac{s+i}{i+1}\alpha^2 + \\ \qquad + \dfrac{s(s+1)}{1.2}\cdot\dfrac{(s+i)(s+i+1)}{(i+1)(i+2)}\alpha^4 + \ldots\Big], \end{cases}$$

wo man für $i = 0$ den Factor von α^0 gleich eins zu nehmen hat.

Aus (6) und (4) bekommt man

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} a' A_i = \frac{1.3.5\ldots.(2i-1)}{2.4.6\ldots.2i}\,\alpha^i\Big[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2i+1}{2i+2}\alpha^2+ \\ \qquad + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4+\ldots\Big] \\ \frac{1}{2} a' B_i = \frac{3.5\ldots.(2i+1)}{2.4\ldots.2i}\,\alpha^{i+1}\Big[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2i+3}{2i+2}\alpha^2+ \\ \qquad + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{(2i+3)(2i+5)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4+\ldots\Big], \end{cases}$$

und im Besonderen

$$(7^*)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} a' A_0 = 1 + (\tfrac{1}{2})^2\alpha^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\alpha^4 + \ldots, \\ \frac{1}{2} a' B_0 = \alpha\Big[1 + (\tfrac{3}{2})^2\alpha^2 + \left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2\alpha^4 + \ldots\Big], \\ \frac{1}{2} a' B_1 = \frac{3}{2}\alpha^2\Big[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\alpha^2 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{5.7}{4.6}\alpha^4 + \ldots\Big]. \end{cases}$$

Die Coefficienten $L_i^{(s)}$ lassen sich auch durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Man hat nämlich nach dem Theorem von Fourier

$$(8)\qquad L_i^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos i(\lambda-\lambda')\,d(\lambda-\lambda')}{[1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')]^s},$$

ein Integral, das auf elliptische Integrale zurückgeführt werden kann.

Zwischen den Laplace'schen Coefficienten besteht die folgende lineare Reductionsformel:

$$(9)\qquad L_i^{(s)} = \frac{i-1}{i-s}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)L_{i-1}^{(s)} - \frac{i+s-2}{i-s}L_{i-2}^{(s)}.$$

Man erhält dieselbe, wenn man die Gleichung (5)

$$\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} L_i^{(s)} z^i$$

nach z differentiirt. Es wird nämlich dann

$$(9^*)\qquad s\alpha\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{-s-1}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)=\tfrac{1}{2}\sum i L_i^{(s)} z^{i-1},$$

oder

$$s\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)\tfrac{1}{2}\sum L_i^{(s)} z^i=\left[1+\alpha^2+\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\tfrac{1}{2}\sum i L_i^{(s)} z^i,$$

woraus nach gehöriger Reduction (9) hervorgeht.

In ähnlicher Weise erhält man eine Relation von folgender Form

$$(10)\qquad i L_i^{(s)} = s\alpha\left(L_{i-1}^{(s+1)} - L_{i+1}^{(s+1)}\right).$$

Man braucht in der That sich nur zu erinnern, dass

$$\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{-s-1}=\tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} L_i^{(s+1)} z^i,$$

und diesen Ausdruck in (9^*) einsetzen. Man bekommt dann

$$s\alpha\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\tfrac{1}{2}\sum L_i^{(s+1)} z^i=\tfrac{1}{2}\sum i L_i^{(s)} z^{i-1},$$

woraus (10) erhalten wird.

Durch Combination von (9) und (10) erhält man die Gleichungen

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} L_i^{(s+1)} &= \frac{(i+s)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2} L_i^{(s)} - \frac{2(i-s+1)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2} L_{i+1}^{(s)},\\ L_{i+1}^{(s+1)} &= \frac{2(i+s)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2} L_i^{(s)} - \frac{(i-s+1)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2} L_{i+1}^{(s)}.\end{aligned}\right.$$

Mittelst dieser Relationen können die Coefficienten $L_i^{(s)}$ für alle Werthe von s und i berechnet werden,[1] wenn die Werthe von $L_0^{(1/2)}$ und $L_1^{(1/2)}$ bekannt sind.

[1] Es ist hier angenommen, dass s eine Zahl von der Form $\frac{n}{2}$ ist, wo $n = 1, 3, 5, \ldots$.

Für $s = {}^1/_2$, ${}^3/_2$ und ${}^5/_2$ lautet die Relation (9) folgendermassen:

$$(12)\quad \begin{cases} A_i = \dfrac{2i-2}{2i-1}\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) A_{i-1} - \dfrac{2i-3}{2i-1} A_{i-2}, \\ B_i = \dfrac{2i-2}{2i-3}\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) B_{i-1} - \dfrac{2i-1}{2i-3} B_{i-2}, \\ C_i = \dfrac{2i-2}{2i-5}\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) C_{i-1} - \dfrac{2i+1}{2i-5} C_{i-2}, \end{cases}$$

und aus (11) erhält man

$$(13)\quad \begin{cases} B_i = \dfrac{(2i+1)\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_i - \dfrac{2(2i+1)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_{i+1}, \\ C_i = \dfrac{(2i+3)\alpha(1+\alpha^2)}{3(1-\alpha^2)^2} B_i - \dfrac{2(2i-1)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2} B_{i+1}, \end{cases}$$

und

$$(13^*)\quad \begin{cases} B_{i+1} = \dfrac{2(2i+1)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_i - \dfrac{(2i+1)(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} A_{i+1}, \\ C_{i+1} = \dfrac{2(2i+3)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2} B_i - \dfrac{(2i-1)(1+\alpha^2)\alpha}{3(1-\alpha^2)^2} B_{i+1}. \end{cases}$$

Durch die Formeln (12), (13) und (13*) können alle Coefficienten A_i, B_i, C_i berechnet werden, wenn A_0 und A_1 bekannt sind.

Es ist nun nach (8)

$$(14)\quad \begin{cases} a' A_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{d(\lambda-\lambda')}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')}}, \\ a' A_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\cos(\lambda-\lambda')\,d(\lambda-\lambda')}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda-\lambda')}}. \end{cases}$$

Diese Integrale werden durch die Landen'sche Substitution auf die Normalform der elliptischen Integrale gebracht.

Gesetzt

$$(14^*)\qquad \varphi = \lambda - \lambda',$$

so führen wir durch die Substitution von Landen statt φ den Winkel θ durch folgende Relation ein:

(15) $$\sin(\theta - \varphi) = \alpha \sin\theta,$$

welche giebt

(15*) $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \alpha}.$$

Aus (15) bekommt man durch Differentiation

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\cos(\theta - \varphi) - \alpha\cos\theta}{\cos(\theta - \varphi)},$$

oder

(16) $$d\varphi = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\theta} - \alpha\cos\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

Man hat aber

$$\cos\varphi = \cos(\theta - \varphi)\cos\theta + \sin(\theta - \varphi)\sin\theta$$
$$= \sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}\cos\theta + \alpha\sin^2\theta,$$

und hieraus

(17) $$\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi} = \sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta} - \alpha\cos\theta,$$

so dass

(18) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}}.$$

Da weiter — für $\alpha < 1$ — φ nach (16) mit θ stetig wächst, so erhält man

(19) $$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi}} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}}.$$

Weiter ist

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi}} = \int_0^\pi \cos\theta\, d\theta + \int_0^\pi \frac{\alpha\sin^2\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}},$$

oder

(20) $$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\varphi}} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}} - \frac{1}{\alpha}\int_0^\pi \sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}\, d\theta.$$

Werden nun die LEGENDRE'schen elliptischen Integrale von der ersten und der zweiten Gattung eingeführt,

$$
(21) \quad \begin{cases} F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}\, d\theta, \end{cases}
$$

so erhalten wir nach (14), (19) und (20)

$$
(22) \quad \begin{cases} a' A_0 = \frac{4}{\pi} F(\alpha), \\ a' A_1 = \frac{4}{\pi \alpha} \left(F(\alpha) - E(\alpha)\right). \end{cases}
$$

Die Integrale E und F werden aus den grossen Tabellen von LEGENDRE[1] erhalten, wo sie auf 14 Decimalen berechnet sind. Ist α sehr klein, empfiehlt es sich, die Reihenentwickelungen (7) zu benutzen. In Bezug auf die numerische Berechnung der Coefficienten von LAPLACE ist weiter zu erwähnen, dass die Recursionsformel (9), mittelst welcher man diese Coefficienten aus L_0 und L_1 successive berechnet, den Uebelstand besitzt, dass für hohe Werthe von i die Coefficienten aus der Differenz zweier grossen Zahlen erhalten werden. Wenn es sich darum handelt, den Werth der Coefficienten für hohe Werthe von i zu berechnen, sind deswegen die oben gegebenen Formeln für die numerische Rechnung nicht geeignet, sondern ist es dann vortheilhaft, sich der Kettenbruchentwickelungen zu bedienen, welche HANSEN aus Recursionformeln von der Form (9) abzuleiten pflegt.

---

[1] „Traité des fonctions elliptiques" II. In „Fyrställiga Logaritmisktrigonometriska Handtabeller" von N. EKHOLM, C. V. L. CHARLIER und K. L. HAGSTRÖM ist F mit 5 Decimalstellen, E mit 4 gegeben. In „Tables des Fonctions elliptiques" sind dieselben von BOHLIN mit 5 Decimalstellen gegeben.

Wenn man nach VI § 4 (1) $\frac{d\lambda}{dt}$ bestimmen will, so muss der Differentialquotient von F nach $\varDelta$ gebildet werden. Man kann ihn in der Weise erhalten, dass man *entweder* die Störungsfunction, vor der Entwickelung in FOURIER'sche Reihen, nach $\varDelta$ differentiirt, und nachher die Entwickelung von $\varDelta^{-s}$ einsetzt, *oder* zuerst die Entwickelung von F ausführt und dann nach $\varDelta$ differentiirt. Man wird somit zur Betrachtung von Differentialen von der Form

$$\frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha}$$

geführt, welche man durch die Coefficienten $L_i^{(s)}$ wie folgt ausdrücken kann.

Wird die Gleichung

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \tfrac{1}{2}\sum L_i^{(s)} z^i \tag{23}$$

nach α differentiirt, erhält man

$$-s\left[2\alpha - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s-1} = \tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha} z^i,$$

oder

$$s\left(z + \frac{1}{z} - 2\alpha\right)\tfrac{1}{2}\sum L_i^{(s+1)} z^i = \tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha} z^i,$$

woraus man bekommt

$$\frac{\partial L_i^{(s)}}{\partial \alpha} = s\left(L_{i-1}^{(s+1)} + L_{i+1}^{(s+1)} - 2\alpha L_i^{(s+1)}\right), \tag{24}$$

aus welcher Formel die partiellen Abteilungen von A, B, C u. s. w. nach a und a' abgeleitet werden können.

Man hat

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{1}{a'}\,\frac{\partial L}{\partial \alpha} \tag{25}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial a'} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial a'} = -\frac{a}{a'^2}\,\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{a'}\,\frac{\partial L}{\partial \alpha}. \tag{25*}$$

Aus diesen Formeln und (4) erhält man nun

$$(26)\quad \begin{cases} a' \dfrac{\partial A_i}{\partial a} = \dfrac{1}{a'} \dfrac{\partial L_i^{(1/2)}}{\partial \alpha}, \\ a' \dfrac{\partial A_i}{\partial a'} = -\dfrac{\alpha}{a'} \dfrac{\partial L_i^{(1/2)}}{\partial \alpha} - A_i \end{cases}$$

oder nach (24) und (4)

$$(27)\quad \begin{cases} a \dfrac{\partial A_i}{\partial a} = \tfrac{1}{2}(B_{i-1} + B_{i+1}) - \alpha B_i, \\ a' \dfrac{\partial A_i}{\partial a'} = - A_i - \tfrac{1}{2}(B_{i-1} + B_{i+1}) + \alpha B_i. \end{cases}$$

Weiter wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial a} &= \frac{1}{a'^2} L_i^{3/2} + \frac{a}{a'^2} \frac{\partial L_i^{(3/2)}}{\partial a} \\ &= \frac{1}{a'^2} L_i^{3/2} + \frac{\alpha}{a'^2} \frac{\partial L_i^{(3/2)}}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial L_i^{(3/2)}}{\partial \alpha} = \tfrac{3}{2}\left(L_{i-1}^{(\frac{5}{2})} + L_{i+1}^{(\frac{5}{2})} - 2\alpha L_i^{(\frac{5}{2})} \right)$$

oder nach (4)

$$\alpha^2 \frac{\partial L_i^{(3/2)}}{\partial \alpha} = \frac{3a'}{2}(C_{i-1} + C_{i+1} - 2\alpha C_i),$$

also

$$(28)\quad a \frac{\partial B_i}{\partial a} = B_i + \tfrac{3}{2}(C_{i-1} + C_{i+1} - 2\alpha C_i).$$

Da B_i eine homogene Function vom Grade -1 in a und a' ist, so hat man weiter

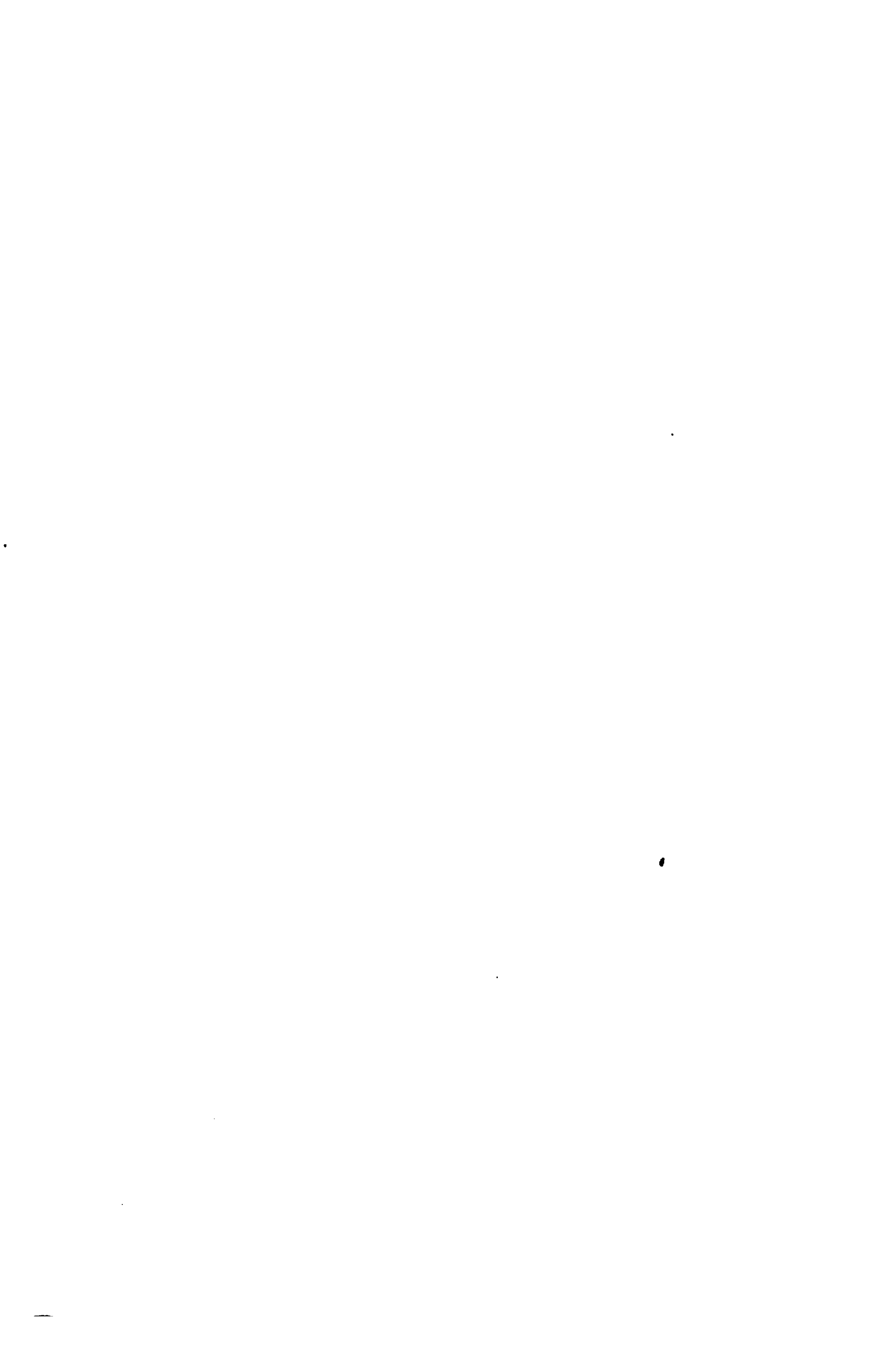
$$(29)\quad a \frac{\partial B_i}{\partial a} + a' \frac{\partial B_i}{\partial a'} = - B_i,$$

woraus $\dfrac{\partial B_i}{\partial a'}$ erhalten wird.

In ähnlicher Weise werden die partiellen Ableitungen von C_i nach a und a' erhalten.

SIEBENTER ABSCHNITT

THEORIE DER SECULAREN STÖRUNGEN



§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

Unter Anwendung von JACOBI'schen Coordinaten und den Elementen von DELAUNAY lauten die Differentialgleichungen des Problems der drei Körper nach V § 10

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L},\\
\frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G},\\
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H},\\
\frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'},
\end{aligned}
\right.
$$

u. s. w.,

und bilden also ein canonisches System mit 6 Freiheitsgraden.

Die Störungsfunction F ist eine periodische Function von l, l', g, g', und h, h', und zwar treten dabei die zwei letztgenannten immer in der Verbindung $h - h'$ auf.

Zwischen diesen Elementen bestehen 3 algebraische Relationen — die Flächenintegrale — welche, wenn die unveränderliche Ebene als Grundebene benutzt wird, folgende Form annehmen (V § 9)

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
h &= h' + 180^0,\\
G^2 - H^2 &= G'^2 - H'^2,\\
H + H' &= c.
\end{aligned}
\right.
$$

Als Function von l und l' betrachtet wurde nach VI die Störungsfunction in eine FOURIER'sche Reihe von der Form

$$F = \sum A \cos(i\,l + i'\,l') + \sum B \sin(i\,l + i'\,l') \tag{3}$$

entwickelt. Diejenigen Glieder in dieser Entwickelung, welche für $i = i' = 0$ erhalten werden, geben die secularen Glieder. Wird der seculare Theil von F mit $[F]$ bezeichnet, so ist, nach dem Theorem von FOURIER,

$$[F] = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F\,d\,l\,d\,l'. \tag{4}$$

Die Function $[F]$ ist also eine Function von

$$L,\ L',\ G,\ G',\ H,\ H',\ g,\ g',\ h,\ h'.$$

Wird in (1) $[F]$ statt F eingesetzt, so erhält man die *Differentialgleichungen für die secularen Störungen.*

Die Differentialgleichungen für L und L' werden dann, weil $[F]$ von l und l' unabhängig ist,

$$\frac{d\,L}{d\,t} = 0, \quad \frac{d\,L'}{d\,t} = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichungen, welche also aussagen, dass L und L', insoweit es sich um die secularen Störungen handelt, unveränderliche Werthe haben, enthalten den ersten Theil des berühmten *Stabilitätsbeweises von* LAPLACE. Würden die periodischen Glieder in F nur zu endlichen periodischen Gliedern in den Elementen Veranlassung geben, so würde hiermit bewiesen sein, dass L und L' eine endliche obere Grenze und eine von Null verschiedene untere Grenze besässen, und wir haben in V § 5 gesehen, dass die Excentricitäten und die Neigungen dann auch eine obere Grenze besitzen. Nun lässt sich zwar nicht beweisen, dass die obige Voraussetzung über die periodischen Glieder in L und L' zutreffend ist. Wie dem auch sei, lassen sich aus den secularen Störungen wichtige Schlüsse auf die Natur der Bewegung ziehen.

Die secularen Störungen in G, H, g, h, G', H', g', h' sind durch folgendes canonisches System von Differentialgleichungen bestimmt:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial G}, \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial h}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial H}, \\ \dfrac{dG'}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial g'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial G'}, \\ \dfrac{dH'}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial h'}, & \dfrac{dh'}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial H'}. \end{cases}$$

Da die Flächenintegrale von l und l' unabhängig sind, so behalten sie für die secularen Theile der Elemente ihre Gültigkeit, und es bestehen also zu (6) die Integrale (2), vorausgesetzt, dass die unveränderliche Ebene noch immer als Grundebene benutzt wird.

Man kann dann, genau wie in V § 10 im allgemeinen Fall gemacht wurde, die Differentialgleichungen für die secularen Störungen mit zwei Freiheitsgraden reduciren. Man setzt zu dem Zweck

$$(7)\qquad G = \Gamma, \quad G' = \Gamma',$$

und erhält dann

$$(7^*)\quad \begin{cases} H = \dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2), \\ H' = \dfrac{c}{2} - \dfrac{1}{2c}(\Gamma^2 - \Gamma'^2); \end{cases}$$

statt (6) erhalten wir

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial \Gamma}, \\ \dfrac{d\Gamma'}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial g'}, & \dfrac{dg'}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial \Gamma'}, \end{cases}$$

so dass die Differentialgleichungen der secularen Elemente auf ein canonisches System mit zwei Freiheitsgraden reducirt werden können.

Nachdem (8) integrirt worden ist, erhält man G, G', H und H' aus (7) und (7*), danach durch eine Quadratur h und h' aus den Gleichungen

$$(8^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial [F]}{\partial H}, \\ h' = h + 180^\circ, \end{cases}$$

wo *vor* der Differentiation $[F]$ als eine Function von G, H, G', H', g, h, g', h' zu betrachten ist.

Endlich erhält man — auch durch eine Quadratur — die secularen Werthe von l und l' aus den Gleichungen

$$(8^{**})\qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial L}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial L'}.$$

Findet die Bewegung in *einer Ebene* statt, so lassen sich die Differentialgleichungen noch weiter reduciren. Nach V § 10 setzt man dann

$$(9)\qquad G = \Pi = K,$$

und man hat

$$(9^*)\qquad \begin{cases} G' = \Pi' = c - K \\ g - g' = \pi - \pi' = k, \end{cases}$$

und wir bekommen canonische Gleichungen mit nur *einem* Freiheitsgrade

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial [F]}{\partial k}, \\ \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial [F]}{\partial K}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besitzen das Integral

$$[F] = \text{Const.}$$

und *lassen sich also auf eine Quadratur zurückführen.*

Die Differentialgleichungen für die secularen Störungen, wenigstens, wenn die Bewegung in einer Ebene stattfindet, lassen sich genau integriren, obgleich diese Integration bis jetzt nicht ausge-

führt worden ist.[1] Man hat sich zu dem Zweck der in II § 2 auseinandergesetzten Methode zu bedienen (wobei man sich indessen zu erinnern hat, dass $[F]$ nunmehr keine quadratische Function von y bez. K ist, was indessen für die Untersuchung nicht wesentlich ist), und im Allgemeinen wird sich herausstellen, dass K eine periodische Function von t wird, die zwischen zwei festen Grenzen K_1 und K_2 schwankt, welche sich als Schnittpunkte der beiden Curven

$$[F] = \text{Const.}$$
$$\text{und } \frac{\partial [F]}{\partial k} = 0$$

ergeben.

Bei den Untersuchungen über die secularen Störungen bedient man sich in der Astronomie gewöhnlich des unreducirten Systems (6), welches von der 8ten Ordnung ist. Im Allgemeinen wird dieses System auch in nicht canonischer Form geschrieben, was bei dieser Frage ein entschiedener Nachtheil ist.

Führen wir in (6) die Elemente von POINCARÉ ξ, η, p u. s. w. ein, und betrachten ein System von n Planeten ($= n + 1$ Körpern), so sind die Differentialgleichungen für die secularen Störungen die folgenden:

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{[\partial F]}{\partial \eta_i}, & \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{\partial [F]}{\partial \xi_i} \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial [F]}{\partial q_i}, & \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial [F]}{\partial p_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir haben in Abschnitt VI gefunden, dass die Störungsfunction — und somit auch $[F]$ — nach positiven Potenzen der Grössen

$$(12) \quad \begin{cases} \xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \\ \xi_2, \eta_2, p_2, q_2, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

entwickelt werden kann.

[1] Einen interessanten Ansatz findet man in der Abhandlung von BOHLIN: „Till frågan om sekulära störingar". Kgl. Svensk Vet. Ak. 1891. Der Verf. hat indessen durch Anwendung der Theorie für die Θ-Functionen mit mehreren Veränderlichen in das Problem unnöthige Schwierigkeiten eingeführt.

Es lässt sich beweisen, dass die Glieder in $[F]$ in dieser Entwickelung immer von *gerader* Ordnung in der Veränderlichen (12) sind. Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen sind immer Functionen von Λ_1, Λ_2 u. s. w., welche, was die secularen Störungen betrifft, constante Grössen sind.

Für die numerischen Anwendungen der secularen Störungen auf die Theorie der Planeten genügt es gewöhnlich, die Glieder von dem *zweiten* Grad in der Veränderlichen (12) zu betrachten. Das so formulirte Problem der secularen Störungen werden wir in den folgenden Paragraphen ausführlich discutiren. Der Einfluss der Glieder höheren Grades wird in § 7 für gewisse Fälle in Betracht gezogen.

§ 2. Ueber den secularen Theil der Störungsfunction.

Führen wir in den Ausdruck VI § 3 für die Entwickelung der Störungsfunction die Reihen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\[2ex] \dfrac{a\,a'}{\Delta_0^3} = \frac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos i(\lambda - \lambda'), \\[2ex] \dfrac{a^2 a'^2}{\Delta_0^5} = \frac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} C_i \cos i(\lambda - \lambda') \end{cases}$$

ein, und behalten nur die Glieder bei, die von λ und λ' unabhängig sind, so erhalten wir für den secularen Theil $[F]$ der Störungsfunction den folgenden Werth.

Gesetzt

$$(2)\qquad R_0 = \frac{\beta^4}{2\,\mu\,\Lambda^2} + \frac{\beta'^4}{2\,\mu'\,\Lambda'^2} + \frac{m_a\,m_b}{2}\,A_0,$$

$$(2^*)\qquad \begin{cases} R_2'(x,\ y) = k^2\,m_a\,m_b\Big\{\dfrac{x^2}{\Lambda}\Big(-\frac{3}{4}\dfrac{a}{a'}B_0 - \frac{1}{2}B_1 + \frac{3}{4}\dfrac{a^2}{a'^2}C_0 + \\ \qquad\qquad + \frac{15}{8}C_0 - \frac{3}{2}\dfrac{a}{a'}C_1 - \frac{9}{8}C_2\Big) + \end{cases}$$

$$
(2^*)\quad\left\{\begin{aligned}
&+\frac{y^2}{\Delta}\Big(-\tfrac{3}{4}\frac{a'}{a}B_0-\tfrac{1}{2}B_1+\tfrac{3}{4}\frac{a'^2}{a^2}C_0\\
&\qquad+\tfrac{15}{8}C_0-\tfrac{3}{2}\frac{a'}{a}C_1-\tfrac{9}{8}C_2\Big)+\\
&+\frac{x\,y}{\sqrt{\Delta\,\Delta'}}\Big(\tfrac{9}{4}B_0+\tfrac{1}{4}B_2-\tfrac{9}{4}\frac{a}{a'}C_0-\tfrac{9}{4}\frac{a'}{a}C_0\\
&\qquad+\tfrac{21}{8}C_1+\tfrac{3}{4}\frac{a}{a'}C_2+\tfrac{3}{4}\frac{a'}{a}C_2+\tfrac{3}{8}C_3\Big)\Big\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2^{**})\qquad R_2''(x,\,y)=k^2 m_a m_b\left\{\left(\frac{x^2}{\Delta}+\frac{y^2}{\Delta}\right)\tfrac{1}{4}B_1-\frac{x\,y}{\sqrt{\Delta\,\Delta'}}\tfrac{1}{2}B_1\right\},
$$

so bekommt man:

$$
(3)\quad [F]=R_0+R_2'(\xi,\,\xi')+R_2'(\eta,\,\eta')-R_2''(p,\,p')-R_2''(q,\,q').
$$

Die Coefficienten in R' und R'' sind von a und a' abhängig, oder, da

$$
\Delta=\beta\sqrt{a},
$$

$$
\Delta'=\beta'\sqrt{a}
$$

ist, von Δ und Δ', welche in den LAPLACE'schen Coefficienten A_i, B_i, C_i eingehen.

Die Ausdrücke für diese Coefficienten können mit Hülfe der in VI § 5 entwickelten Formeln bedeutend einfacher geschrieben werden.

Man bekommt nämlich nach diesen

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
C_3&=\quad 4\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)C_2-7\,C_1 &&\text{aus (12)},\\
C_2&=-2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)C_1+5\,C_0 &&\quad\text{„ (12)},\\
C_1&=\quad\frac{2\,\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}B_0+\frac{\alpha\,(1+\alpha^2)}{8\,(1-\alpha^2)^2}B_1 &&\quad\text{„ (13*)},\\
C_0&=\quad\frac{\alpha\,(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}B_0+\frac{2\,\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^2}B_1 &&\quad\text{„ (13)},\\
B_2&=\quad 2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)B_1-3\,B_0 &&\quad\text{„ (12)},
\end{aligned}\right.
$$

wo die Zahlen in den Klammern sich auf die entsprechenden Formeln in VI § 5 beziehen.

Mit Hilfe dieser Relationen können die Coefficienten in den Ausdrücken für R_2' und R_2'' durch die Grössen B_0 und B_1 ausgedrückt werden, oder, was sich hier als mehr geeignet herausstellt, als Functionen von B_1 und B_2.

Man bekommt in der That aus (4)

$$(\tfrac{15}{8} + \tfrac{3}{4}\alpha^2)\, C_0 - \tfrac{3}{2}\alpha\, C_1 - \tfrac{9}{8}\, C_2 = \tfrac{3}{4}\alpha\, B_0 + \tfrac{3}{4}\, B_1,$$

$$-\tfrac{9}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) C_0 + \tfrac{21}{8}\, C_1 + \tfrac{3}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) C_2 + \tfrac{3}{8}\, C_3 = -\tfrac{3}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) B_1,$$

so dass

$$R_2'(x, y) = k^2 m_a m_b \left\{\tfrac{1}{8} B_1 \left(\frac{x^2}{\Delta} + \frac{y^2}{\Delta}\right) - \tfrac{1}{4} B_2 \frac{x y}{\sqrt{\Delta \Delta'}}\right\}, \tag{5}$$

und der Ausdruck für $[F]$ wird also

$$\left\{\begin{aligned}
[F] = {} & \frac{\beta^4}{2\mu\, \Delta^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu'\, \Delta'^2} + \tfrac{1}{2} k^2 m_a m_b A_0 + \\
& + k^2 m_a m_b \left\{\tfrac{1}{8} B_1 \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\Delta} + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\Delta'}\right) - \right. \\
& \quad - \tfrac{1}{4} B_2 \left(\frac{\xi \xi'}{\sqrt{\Delta \Delta'}} + \frac{\eta \eta'}{\sqrt{\Delta \Delta'}}\right) - \\
& \quad \left. - \tfrac{1}{8} B_1 \left(\frac{p^2 + q^2}{\Delta} + \frac{p'^2 + q'^2}{\Delta'} - \frac{2(p p' + q q')}{\sqrt{\Delta \Delta'}}\right)\right\},
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Werden die Elemente ξ, η u. s. w. mittelst VI § 1 (16) durch die elliptischen Elemente ausgedrückt und nur die Glieder zweiten Grades in e und i beibehalten, so erhält man aus (6) den folgenden wohlbekannten Ausdruck für den secularen Theil der Störungsfunction

$$\left\{\begin{aligned}
[F] = {} & \frac{\beta^2}{2\mu\, \Delta^2} + \frac{\beta'^2}{2\mu\, \Delta'^2} + \tfrac{1}{2} k^2 m m' A_0 + \\
& + k^2 m m' \{\tfrac{1}{8} B_1 (e^2 + e'^2) - \\
& \quad - \tfrac{1}{4} B_2\, e e' \cos(\pi - \pi') - \\
& \quad - \tfrac{1}{8} B_1 (\sin^2 i + \sin^2 i') + \\
& \quad + \tfrac{1}{4} B_1 \sin i \sin i' \cos(\Omega - \Omega')\}.
\end{aligned}\right. \tag{6*}$$

Der Ausdruck (6) (oder (6*)) wird den numerischen Berechnungen der secularen Störungen zu Grunde gelegt.

Wie aus demselben hervorgeht, braucht man, um die secularen Störungen zu berechnen, nur drei von den LAPLACE'schen Coefficienten, nämlich A_0, B_1 und B_2, zu kennen.

Ist die Zahl der Planeten grösser als zwei, so lässt sich der entsprechende Ausdruck für $[F]$ direct aus (6) ableiten.

Es seien, bei n Planeten, die Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$, die auf JACOBI'sche Coordinatensysteme (V § 4) bezogen sind. Ihre POINCARÉ'schen Elemente (VI § 1) seien ξ_i, η_i u. s. w. $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Führen wir nun die Bezeichnungen

$$(7^*)\quad \begin{cases} R_0 = \sum \dfrac{\beta_i^4}{2\mu_i A_i^2} + \tfrac{1}{2}\sum k^2 m_i m_j A_0(a_i, a_j), \\ R_2'(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \Big\{\tfrac{1}{8} B_1(a_i, a_j)\left[\dfrac{x_i^2}{A_i} + \dfrac{x_j}{A_j}\right] - \\ \qquad - \tfrac{1}{4} B_2(a_i, a_j)\dfrac{x_i x_j}{\sqrt{A_i A_j}}\Big\}, \\ R_2''(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \Big\{\tfrac{1}{8} B_1(a_i, a_j)\left[\dfrac{x_i^2}{A_i} + \dfrac{x_j^2}{A_j}\right] - \\ \qquad - \tfrac{1}{4} B_1(a_i, a_j)\dfrac{x_i x_j}{\sqrt{A_i A_j}}\Big\} \end{cases}$$

ein, so wird

$$(7)\quad \begin{cases} [F] = R_0 + \sum R_2'(\xi_i, \xi_j) + \sum R_2'(\eta_i, \eta_j) \\ \qquad - \sum R_2''(p_i, p_j) - \sum R_2''(q_i, q_j), \end{cases}$$

wo bei den Summationen $ij = 12, 13, \ldots, \widehat{n-1}\, n$.

Für die Coefficienten B_1 und B_2 hat man nach VI § 5 (8) folgende Ausdrücke:

$$(8)\quad \begin{cases} B_1(a_i, a_j) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{a_i a_j \cos\omega\, d\omega}{[a_i^2 + a_j^2 - 2 a_i a_j \cos\omega]^{3/2}}, \\ B_2(a_i, a_j) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{a_i a_j \cos 2\omega\, d\omega}{[a_i^2 + a_j^2 - 2 a_i a_j \cos\omega]^{3/2}}. \end{cases}$$

§ 3. Seculare Störungen, wenn nur zwei Planeten vorhanden sind.

Bei der Anwendung von JACOBI'schen Coordinaten kann man die Reihenfolge der Planeten willkürlich wählen. Bei zwei Planeten m und m' kann man also entweder m auf ein durch die Sonne M gehendes Coordinatensystem beziehen und dann die Bewegung von m' auf ein solches, dessen Anfangspunkt in dem Schwerpunkt von M und m liegt, oder umgekehrt. Wird mit m derjenige Planet bezeichnet, der näher an der Sonne sich befindet, so nehmen wir an, dass seine Bewegung auf ein Coordinatensystem bezogen ist, dessen Anfangspunkt durch die Sonne geht. Die Bewegung des äusseren Planeten bezieht sich dann auf den Schwerpunkt von M und m als Anfangspunkt.

Man hat dann

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{m\,M}{m+M}, \\[2ex] \mu' = \dfrac{m'\,(m+M)}{m+m'+M}, \end{cases}$$

und

$$(1^*)\qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{k\,m\,M}{\sqrt{m+M}}, \\[2ex] \beta' = k\,m'\sqrt{\dfrac{M\,(m+M)}{m+m'+M}}. \end{cases}$$

Die Coordinaten von m seien $\varLambda$ (oder a), λ, ξ, η, p und q, diejenigen von m' $\varLambda'$ (oder a') λ', ξ', η', p' und q'. Da nach der Voraussetzung $a < a'$, so ist α kleiner als die Einheit, und wir können die Formeln von VI § 5 direct benutzen.

Wir wollen mittelst der daselbst gegebenen Formeln die Coefficienten A_0, B_1 und B_2 direct durch die elliptischen Integrale F und E ausdrücken. Für A_0 haben wir schon den Ausdruck VI § 5 (22)

$$(2)\qquad a'\,A_0 = \frac{4}{\pi}\,\mathsf{F}(\alpha)$$

gefunden.

Nach VI § 5 (13*) bekommt man

$$B_1 = \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_1,$$

und also, wenn man die Ausdrücke für A_0 und A_1 einführt

$$(3) \qquad \frac{\pi}{4} \alpha' B_1 = -\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \mathsf{F}(\alpha) + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \mathsf{E}(\alpha).$$

Nach VI § 5 (13*) bekommt man weiter

$$B_2 = \frac{6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1 - \frac{3(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2} A_2,$$

oder, da nach VI § 5 (12)

$$A_2 = \tfrac{4}{3}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) A_1 - \tfrac{1}{3} A_0,$$

$$B_2 = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1.$$

Werden hier die Werthe von A_0 und A_1, durch elliptische Integrale ausgedrückt, eingesetzt, so bekommt man

$$(4) \qquad \frac{\pi}{4} \alpha B_2 = -\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2} \mathsf{F}(\alpha) + \frac{2(1+\alpha^2) - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \mathsf{E}(\alpha).$$

Zur Controlle kann man sich der Formel

$$(5) \qquad \alpha B_2 = 2(1+\alpha^2) B_1 - 3\alpha B_0$$

bedienen. Man hat nämlich nach VI § 5 (13)

$$B_0 = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} A_0 - \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} A_1,$$

also

$$(6) \qquad \frac{\pi}{4} \alpha' B_0 = -\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} \mathsf{F}(\alpha) + \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2} \mathsf{E},$$

und werden nun die Ausdrücke (3), (4) und (6) in (5) eingesetzt, so findet man, dass diese Gleichung identisch erfüllt wird.

Wir haben also die folgenden Formeln zur Berechnung von A_0, B_1 und B_2:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} a' \; A_0 = \mathsf{F}, \\ \frac{\pi}{4} a' \; B_1 = -\frac{1}{1-\alpha^2}\mathsf{F} + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}\mathsf{E}, \\ \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = -\frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2}\mathsf{F} + \frac{2(1+\alpha^2)^2-6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}\mathsf{E}. \end{cases}$$

Die Integrale F und E sind für kleine Werthe von α einander nahe gleich $\left(=\frac{\pi}{2}\right)$, und folglich werden dann B_1 und B_2 aus der Differenz zwischen zwei nahe gleichen Zahlen berechnet. Dies bedeutet indessen in diesem Falle wenig, da die Tafeln von LEGENDRE mit einer sehr grossen Zahl von Decimalen berechnet sind.

In den Tafeln für F und E wird eine Grösse θ, durch die Formel

$$(8)\quad \alpha = \sin\theta$$

definirt, als Argument benutzt. Es ist deswegen vortheilhaft, in (7) θ statt α einzuführen. Es wird dann

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} a' \; B_1 = (1 + 3\,\mathrm{tg}^2\theta + 2\,\mathrm{tg}^4\theta)\mathsf{E} - (1 + \mathrm{tg}^2\theta)\mathsf{F}, \\ \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 2(1 + \mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{tg}^4\theta)\mathsf{E} - (2 + \mathrm{tg}^2\theta)\mathsf{F}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen für die secularen Störungen lauten:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\eta}, & \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\xi}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial p}, \\ \frac{d\xi'}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\eta'}, & \frac{d\eta'}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\xi'}, \\ \frac{dp'}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial q'}, & \frac{dq'}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial p'}, \end{cases}$$

und nachdem diese Gleichungen integrirt worden sind, erhält man die mittleren Längen — λ und λ' — aus den Gleichungen

$$(10^*) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda}, \qquad \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \Lambda'}.$$

Nach VI § 1 (16) hat man, näherungsweise,

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = \sqrt{\Lambda}\, e \cos \pi = \sqrt{\Lambda}\, r, \\ \eta = -\sqrt{\Lambda}\, e \sin \pi = -\sqrt{\Lambda}\, s, \\ p = \sqrt{\Lambda} \sin i \cos \Omega = \sqrt{\Lambda}\, u, \\ q = -\sqrt{\Lambda} \sin i \sin \Omega = -\sqrt{\Lambda}\, v, \end{cases}$$

und es ist also, da Λ hier von der Zeit unabhängig ist,

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial [F]}{\partial s}, & \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial [F]}{\partial r}, \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial [F]}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{\Lambda} \dfrac{\partial [F]}{\partial u}, \\ \dfrac{dr'}{dt} = -\dfrac{1}{\Lambda'} \dfrac{\partial [F]}{\partial s'}, & \dfrac{ds'}{dt} = \dfrac{1}{\Lambda'} \dfrac{\partial [F]}{\partial r'}, \\ \dfrac{du'}{dt} = -\dfrac{1}{\Lambda'} \dfrac{\partial [F]}{\partial v'}, & \dfrac{dv'}{dt} = \dfrac{1}{\Lambda'} \dfrac{\partial [F]}{\partial u'}. \end{cases}$$

Durch die Veränderlichen r, s, u, v, r' u. s. w. ausgedrückt ist nun

$$(13) \quad \begin{cases} [F] = \dfrac{\beta^4}{2\mu \Lambda^2} + \dfrac{\beta'^4}{2\mu' \Lambda'^2} + \tfrac{1}{2} k^2 m m' A_0 + \\ \qquad + k^2 m m' \{\tfrac{1}{8} B_1 (r^2 + s^2 + r'^2 + s'^2) - \tfrac{1}{4} B_2 (r r' + s s') \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{8} B_1 (u^2 + v^2 + u'^2 + v'^2) + \tfrac{1}{4} B_1 (u u' + v v')\}. \end{cases}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$(14) \quad \begin{cases} \varkappa_1 = \dfrac{k^2 m m'}{4 \Lambda} B_1, & \varkappa_2 = \dfrac{k^2 m m'}{4 \Lambda} B_2, \\ \varkappa_1' = \dfrac{k^2 m m'}{4 \Lambda'} B_1, & \varkappa_2' = \dfrac{k^2 m m'}{4 \Lambda'} B_2 \end{cases}$$

ein, so erhalten wir also folgende Differentialgleichungen

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\varkappa_1 s + \varkappa_2 s', \\ \dfrac{ds}{dt} = \varkappa_1 r - \varkappa_2 r', \\ \dfrac{dr'}{dt} = -\varkappa_1' s' + \varkappa_2' s, \\ \dfrac{ds'}{dt} = \varkappa_1' r' - \varkappa_2' r, \end{cases}$$

und

$$(15^*)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \varkappa_1 (v - v'), \\ \dfrac{dv}{dt} = \varkappa_1 (-u + u'), \\ \dfrac{du'}{dt} = \varkappa_1' (v' - v), \\ \dfrac{dv'}{dt} = \varkappa_1' (-u' + u), \end{cases}$$

Für die Coefficienten $\varkappa$ erhält man in folgender Weise Ausdrücke, die für die numerische Rechnung bequem sind. Es ist genähert (nach V § 5)

$$(16)\quad \begin{cases} \beta = k m \sqrt{M}, \qquad \beta' = k m' \sqrt{M}, \\ n = \dfrac{k\sqrt{M}}{a^{3/2}}, \end{cases}$$

also

$$\frac{k^2 m m'}{\varDelta} = \frac{k^2 m m'}{\beta \sqrt{a}} = \frac{k m'}{\sqrt{M}\sqrt{a}} = n a \frac{m'}{M}$$

und ebenfalls

$$\frac{k^2 m m'}{\varDelta'} = n' a' \frac{m}{M},$$

und man hat demnach

$$17)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = n \dfrac{m'}{4M} a B_1, \qquad \varkappa_2 = n \dfrac{m'}{4M} a B_2, \\ \varkappa_1' = n' \dfrac{m}{4M} a' B_1, \qquad \varkappa_2' = n' \dfrac{m}{4M} a' B_2. \end{cases}$$

Nach (7) ist $a' B_1$ und $a' B_2$, und ebenfalls $a B_1$ und $a B_2$, nur von dem *Verhältniss* zwischen a und a' abhängig, und die Formeln (17) sind deswegen für numerische Rechnungen sehr bequem, da die Wahl der Einheiten für Zeit, Abstand und Masse einfach durch den Werth für die mittlere Bewegung n (und n') bestimmt ist.

Die Berechnung der secularen Störungen in der Excentricität und der Länge des Perihels geschieht nach der Formel (15), für die Neigung und die Knotenlänge nach (15*).

Man kann die Gleichungen (15) und (15*) in zweierlei Weise integrieren, *entweder* indem man, den Principien der Störungstheorie gemäss, die Grössen $r, s, u, v, r', s', u', v'$ in der rechten Seite dieser Gleichungen als constante Grössen betrachtet, *oder* man kann die Integration streng ausführen, was ja leicht ist, da es sich hier um lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten handelt. Beide Methoden werden mit Vortheil in der Astronomie benutzt. Bei numerischen Berechnungen ist die erste Methode oft genügend.

Wir wollen die obigen Formeln auf die gegenseitigen Störungen von *Jupiter* und *Saturn* anwenden.

Es ist hier, in gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt,

für Jupiter $\log a = 0.7162$
„ Saturn $\log a' = 0.9802$
und also $\log \alpha = 9.7360$,

woraus man erhält

$$\theta = 33^\circ.00\,,$$
$$\mathsf{F} = 1.712\,,$$
$$\mathsf{E} = 1.447\,.$$

Nach (9) bekommt man hieraus

$$\tfrac{1}{2} a' B_1 = 0.4323\,,$$
$$\tfrac{1}{2} a' B_2 = 0.2812\,.$$

Für die Excentricitäten und die Perihellängen der beiden Planeten h man die Werthe (1850)

Jupiter	*Saturn*
$e = 0.04824$,	$e' = 0.05600$,
$\pi = 11^\circ.91$,	$\pi' = 90^\circ.11$,

und folglich wird

$$\log r = 8.6740\,, \qquad \log r' = 6.0315_n\,,$$

$$\log s = 7.9981\,, \qquad \log s' = 8.7482\,.$$

Für die Massen nehmen wir die Werthe

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{1048}\,, \qquad \frac{m'}{M} = \frac{1}{3500}$$

an, und, indem die Einheit der Zeit zu einem Julianischem Jahre genommen wird, hat man

$$n = 109256''\,, \qquad n' = 44000''.$$

Die Werthe der Coefficienten $\varkappa$ werden somit

$$\log \varkappa_1 = 0.8661\,, \qquad \log \varkappa_1' = 1.2589\,,$$

$$\log \varkappa_2 = 0.6793\,, \qquad \log \varkappa_2' = 1.0721\,.$$

Nach (15) erhalten wir nun

$$\frac{dr}{dt} = +\,0''.1945\,, \quad [+\,0''.2014] \qquad \frac{dr'}{dt} = -\,0''.8987\,, \quad [-\,0''.9810]$$

$$\frac{ds}{dt} = +\,0''.3478\,, \quad [+\,0''.3511] \qquad \frac{ds'}{dt} = -\,0''.5593\,. \quad [-\,0''.5362]$$

Zum Vergleich habe ich in den Parenthesen die Zahlen gegeben, welche Leverrier für die betreffenden secularen Störungen erhält, indem er den Einfluss sämmtlicher Planeten berücksichtigt.

Mit den folgenden Werthen für die Neigungen und die Längen der Knoten auf der Ekliptik 1850.0

♃	$i = 1°.31\,,$	$\Omega = 98°.94\,,$
♄	$i' = 2°.49\,,$	$\Omega' = 112°.35$

erhalten wir weiter

$$\log u = 7.5505_n\,, \qquad \log u' = 8.2180_n\,,$$

$$\log v = 8.3587\,, \qquad \log v' = 8.6039\,,$$

und hieraus

$$\frac{du}{dt} = -\,0''.1293\,, \quad [-\,0''.1293] \qquad \frac{du'}{dt} = +\,0''.3195\,, \quad [+\,0''.3328]$$

$$\frac{dv}{dt} = -\,0''.0953\,, \quad [-\,0''.0941] \qquad \frac{dv'}{dt} = +\,0''.2355\,. \quad [+\,0''.2428]$$

Aus den Formeln

$$e^2 = r^2 + s^2, \qquad \sin^2 i = u^2 + v^2,$$

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{s}{r}, \qquad \operatorname{tg} \Omega = \frac{v}{u}$$

erhält man

$$e\,de = \quad r\,dr + s\,ds, \qquad \sin i \cos i\,di = \quad u\,du + v\,dv,$$

$$e^2 d\pi = -s\,dr + r\,ds, \qquad \sin^2 i\,d\Omega = -v\,du + u\,dv,$$

und setzt man hier die Werthe für $\frac{dr}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ u. s. w. ein, so bekommt man folgende Werthe für die secularen Störungen in der Excentricität, der Perihellänge u. s. w., wo wir setzen

$$e = \sin\varphi, \qquad e' = \sin\varphi'$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = +\,0''.262, \qquad \frac{d\varphi'}{dt} = -\,0''.558,$$

$$\frac{d\pi}{dt} = +\,6''.212, \qquad \frac{d\pi'}{dt} = +\,16''.046,$$

$$\frac{di}{dt} = -\,0''.0741, \qquad \frac{di'}{dt} = +\,0''.0963,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\,6''.233, \qquad \frac{d\Omega'}{dt} = -\,8''.859.$$

Die obigen Zahlen enthalten die *jährliche* seculare Veränderung der betreffenden Elemente. Man hat also z. B.:

$$♃ \qquad \pi = 11^\circ.91 + 6''.212 \quad (t - 1850.0).$$

§ 4. Fortsetzung. Trigonometrische Ausdrücke für die secularen Störungen der Excentricität und der Perihellänge.

Die secularen Störungen in den Excentricitäten und den Perihellängen sind durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\,\varkappa_1\, s + \varkappa_2\, s', \\[2mm] \dfrac{ds}{dt} = \quad \varkappa_1\, r - \varkappa_2\, r', \\[2mm] \dfrac{dr'}{dt} = -\,\varkappa_1'\, s' + \varkappa_2'\, s, \\[2mm] \dfrac{ds'}{dt} = \quad \varkappa_1'\, r' - \varkappa_2'\, r \end{cases}$$

bestimmt, welche wir nun integriren wollen.

Zuerst bemerken wir, dass man aus (1) erhält

$$\varkappa_2'\left(r\frac{dr}{dt}+s\frac{ds}{dt}\right)+\varkappa_2\left(r'\frac{dr'}{dt}+s'\frac{ds'}{dt}\right)=0,$$

und es ist also

$$\varkappa_2'(r^2+s^2)+\varkappa_2(r'^2+s'^2)=C, \tag{2}$$

wo C eine Integrationsconstante bezeichnet.

Setzt man die Ausdrücke für r und s hier ein, so erhält diese Gleichung die Form

$$\varkappa_2'e^2+\varkappa_2e'^2=C, \tag{2*}$$

eine Gleichung, welche unmittelbar zeigt, dass, vorausgesetzt dass $\varkappa_2$ und $\varkappa_2'$ dasselbe Zeichen haben, die Excentricitäten nicht beliebig gross werden können. Sind sie für beide Körper zu einer bestimmten Epoche klein, so müssen sie immer klein bleiben. Nach § 3 (17) findet man, dass $\varkappa_2$ und $\varkappa_2'$ dasselbe Zeichen besitzen, wenn dies mit den mittleren Bewegungen n und n' der Fall ist, d. h. wenn beide Planeten sich in derselben Richtung um die Sonne bewegen. Die secularen Störungen wachsen also nicht über alle Grenzen, wie man es nach der im vorigen Paragraphen benutzten Methode erwarten könnte.

Aus der linearen Form der Differentialgleichungen (1) wird folgende Form für die Integrale bedingt

$$\left\{\begin{aligned} r&=N\cos(gt+\beta), & r'&=N'\cos(gt+\beta'),\\ s&=N\sin(gt+\beta), & s'&=N'\sin(gt+\beta'). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Setzt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man in der That folgende Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (g-\varkappa_1)N+\varkappa_2\qquad N'&=0,\\ \varkappa_2'N+(g-\varkappa_1')N'&=0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

welche erfordern, dass

$$\begin{vmatrix} g-\varkappa_1, & \varkappa_2\\ \varkappa_2', & g-\varkappa_1' \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln — g_1 und g_2 — und einer jeden entspricht nach (4) ein Werth für das Verhältniss zwischen N und N'. Werden diese beiden Verhältnisse mit $N_1 : N_1'$ und $N_2 : N_2'$ bezeichnet, so lauten nun die allgemeinen Integrale von (1)

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
r &= N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2), \\
s &= N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2), \\
r' &= N_1' \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2' \cos(g_2 t + \beta_2), \\
s' &= N_1' \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2' \sin(g_2 t + \beta_2),
\end{aligned}
\right.
$$

wo N_1, N_2, β_1 und β_2 als Integrationsconstanten betrachtet werden können.

Es lässt sich beweisen, dass die Wurzeln g_1 und g_2 *reell und positiv* sein müssen, wenn, wie hier vorausgesetzt wird, die beiden Planeten sich in derselben Richtung um die Sonne bewegen.

Die Gleichung (5) lautet nämlich

$$
(5^*) \qquad g^2 - g(\varkappa_1 + \varkappa_1') + \varkappa_1 \varkappa_1' - \varkappa_2 \varkappa_2' = 0
$$

und da

$$
(\varkappa_1 + \varkappa_1')^2 - 4(\varkappa_1 \varkappa_1' - \varkappa_2 \varkappa_2') = (\varkappa_1 - \varkappa_1')^2 + 4\varkappa_2 \varkappa_2',
$$

so sind, unter der gemachten Voraussetzung, die Wurzeln immer reell.

Sie sind ferner beide positiv, wenn die Ungleichheit

$$
(7) \qquad \varkappa_1 \varkappa_1' - \varkappa_2 \varkappa_2' > 0
$$

erfüllt ist, welche nach § 3 (14) in der Form

$$
(7^*) \qquad \frac{k^4 m^2 m'^2}{16 A A'} (B_1^2 - B_2^2) > 0
$$

geschrieben werden kann, oder einfach

$$
(8) \qquad B_1 > B_2 .
$$

Diese Ungleichheit ist aber immer erfüllt. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned}
(1 - \alpha^2)^2 B_1 &= 3\alpha(1 + \alpha^2) A_1 - 6\alpha^2 A_2 && (\text{VI § 5 (13)}), \\
(1 - \alpha^2)^2 B_2 &= 6\alpha^2 A_1 - 3\alpha(1 + \alpha^2) A_2 && (\text{VI § 5 (13*)}),
\end{aligned}
$$

also

$$(9) \qquad B_1 - B_2 = \frac{8\,\alpha}{(1+\alpha)^2}(A_1 + A_2) = \frac{8\,a\,a'}{(a+a')^2}(A_1 + A_2),$$

woraus (8) hervorgeht.[1]

Die Integrationsconstanten werden aus den Werthen der Grössen r, s, r', s' für eine bestimmte Zeit erhalten. Sind für $t = 0$ diese Werthe r_0, s_0, r_0', s_0', so hat man

$$\begin{aligned}
r_0 &= N_1 \cos\beta_1 + N_2 \cos\beta_2,\\
s_0 &= N_1 \sin\beta_1 + N_2 \sin\beta_2,\\
r_0' &= N_1' \cos\beta_1 + N_2' \cos\beta_2,\\
s_0' &= N_1' \sin\beta_1 + N_2' \sin\beta_2.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
x_1 &= N_1 \cos\beta_1, & x_2 &= N_2 \cos\beta_2,\\
y_1 &= N_1 \sin\beta_1, & y_2 &= N_2 \sin\beta_2,\\
k_1 &= -\frac{1}{\varkappa_2}(g_1 - \varkappa_1), & k_2 &= -\frac{1}{\varkappa_2}(g_2 - \varkappa_1),
\end{aligned}$$

so lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= r_0, & y_1 + y_2 &= s_0,\\
k_1 x_1 + k_2 x_2 &= r_0', & k_1 y_1 + k_2 y_2 &= s_0',
\end{aligned}$$

und es ist also

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned}
(k_2 - k_1) x_1 &= k_2 r_0 - r_0', & (k_2 - k_1) y_1 &= k_2 s_0 - s_0',\\
(k_2 - k_1) x_2 &= r_0' - k_1 r_0, & (k_2 - k_1) y_2 &= s_0' - k_1 s_0.
\end{aligned}\right.$$

Definition: Es wird gesagt, dass die Länge π des Perihels eine mittlere Bewegung — b — besitzt, wenn die Differenz

$$\pi - b\,t$$

für alle Werthe von t eine endliche obere Grenze hat.

[1] Vergleiche Dziobek: Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen. S. 199.

Man kann nun aus (6) den Satz ableiten, dass in dem hier betrachteten Fall die Perihellängen eine solche mittlere Bewegung besitzen, und zwar wird dieselbe ihrem Werth nach mit einer von den Wurzeln g_1 oder g_2 zusammenfallen. In einem Ausnahmefall, der unten betrachtet wird, wird sie gleich dem arithmetischen Mittel zwischen diesen beiden Grössen.

Es ist nämlich nach (6)

$$(11) \qquad \begin{cases} e\cos\pi = N_1\cos(g_1 t + \beta_1) + N_2\cos(g_2 t + \beta_2), \\ e\sin\pi = N_1\sin(g_1 t + \beta_1) + N_2\sin(g_2 t + \beta_2). \end{cases}$$

Wir nehmen zuerst an, dass $N_1 < N_2$. Aus (11) folgt nun, dass

$$e\sin(\pi - g_2 t - \beta_2) = N_1\sin(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2),$$
$$e\cos(\pi - g_2 t - \beta_2) = N_1\cos(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2) + N_2,$$

und hieraus

$$(12) \qquad \operatorname{tg}(\pi - g_2 t - \beta_2) = \frac{N_1\sin(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2)}{N_1\cos(\overline{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2) + N_2}.$$

Da der Voraussetzung nach $N_1 < N_2$, so kann der Nenner in diesem Ausdrucke nie Null werden. Folglich wird $\operatorname{tg}(\pi - g_2 t - \beta_2)$ nie unendlich, so dass der Winkel

$$\pi - g_2 t - \beta_2$$

entweder numerisch kleiner als 90° ist, oder stets zwischen den Grenzen 90° und 270° liegt. *Die Länge des Perihels — π — besitzt also die mittlere Bewegung g_2.*

Ist zweitens $N_1 > N_2$, so beweist man in ähnlicher Weise, dass π eine mittlere Bewegung gleich g_1 hat.

Wenn endlich $N_1 = N_2$, so wird der Werth von π in folgender Weise gefunden. Aus (11) erhält man — für beliebige Werthe für N_1 und N_2 — die Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} e\sin\left(\pi - \frac{g_1 + g_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = (N_1 - N_2)\sin\left(\frac{g_1 - g_2}{2} t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right), \\ e\cos\left(\pi - \frac{g_1 + g_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = (N_1 + N_2)\cos\left(\frac{g_1 - g_2}{2} t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right). \end{cases}$$

Ist nun $N_1 = N_2$ $(= N)$, so bekommt man hieraus:

$$(14) \quad \begin{cases} \pi - \dfrac{g_1 + g_2}{2} t - \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2} = i \times 180^\circ, \\ e = (-1)^i 2 N \cos\left(\dfrac{g_1 - g_2}{2} t + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right), \end{cases}$$

wo i eine ganze Zahl bezeichnet.

Das Perihel besitzt also in diesem Falle eine mittlere Bewegung, die gleich $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ *ist.*

In Bezug auf die Perihellänge des anderen Planeten m' gelten ähnliche Schlüsse. Sie besitzt eine mittlere Bewegung gleich g_1, wenn $N_1' > N_2'$, gleich g_2, wenn $N_1' < N_2'$ und gleich $\frac{1}{2}(g_1 + g_2)$, wenn $N_1' = N_2'$.

Wir haben aus (2*) schon den Schluss gezogen, dass e und e' eine endliche obere Grenze besitzen müssen. Wir können diese Grenze nun näher bestimmen. In der That folgt aus (11), dass

$$(15) \qquad e^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2 N_1 N_2 \cos(\widehat{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2),$$

und in ähnlicher Weise

$$e'^2 = N_1'^2 + N_2'^2 + 2 N_1' N_2' \cos(\widehat{g_1 - g_2}\, t + \beta_1 - \beta_2),$$

so dass e und e' durch folgende Ungleichheiten bestimmt sind:

$$(16) \quad \begin{cases} |N_1 - N_2| < e < N_1 + N_2, \\ |N_1' - N_2'| < e' < N_1' + N_2'. \end{cases}$$

Aus (5) findet man, dass die Grössen g_1 und g_2 mit den kleinen Massen m und m' multiplicirt und folglich klein sind. Die mittleren Bewegungen des Perihels sind deswegen immer klein.

Beispiel. Wenden wir die hier auseinandergesetzten Formeln auf das System *Sonne—Jupiter—Saturn* an, so erhalten wir zuerst aus (5) unter Anwendung der Werthe für $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, welche wir im vorigen Paragraphen berechnet haben,

$$g_1 = + 22''.06,$$

$$g_2 = + \ 8''.44.$$

Aus (4) bekommen wir

$$\frac{N_1'}{N_1} = -3.078\,, \qquad \frac{N_2'}{N_2} = +0.818\,,$$

und dann aus (10), indem man die Werthe für r, s, r', s' des vorigen Paragraphen benutzt,

$$N_1 = +0.0158\,, \qquad N_2 = +0.0434\,,$$
$$N_1' = -0.0486\,, \qquad N_2' = +0.0354\,,$$
$$\beta_1 = -51^\circ.00\,, \qquad \beta_2 = +30^\circ.82\,,$$

und es ist also

$$e \cos\pi = +0.0158 \cos(22''.06\,t - 51^\circ.00) + 0.0434 \cos(3''.44\,t + 30^\circ.82)\,,$$
$$e \sin\pi = +0.0158 \sin(22''.06\,t - 51^\circ.00) + 0.0434 \sin(3''.44\,t + 30^\circ.82)\,,$$
$$e' \cos\pi' = -0.0486 \cos(22''.06\,t - 51^\circ.00) + 0.0354 \cos(3''.44\,t + 30^\circ.82)\,,$$
$$e' \sin\pi' = -0.0486 \sin(22''.06\,t - 51^\circ.00) + 0.0354 \sin(3''.44\,t + 30^\circ.82)\,.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben die Excentricität und die Perihellänge der Bahn von *Jupiter*, die beiden letzteren diejenigen in der Bahn von *Saturn*.

Aus der relativen Grösse der Coefficienten in diesen Ausdrücken folgt nun, dass die mittleren Bewegungen der Perihelien folgende Werthe besitzen:

Für *Jupiter*	$+\ 3''.44$,
„ *Saturn*	$+\ 22''.06$.

Im vorigen Paragraphen haben wir für die betreffenden Grössen die Werthe $+\ 6''.21$ und $+\ 16''.05$ gefunden. Diese letzteren Zahlen beziehen sich auf die *augenblickliche* Geschwindigkeit des Perihels, wogegen die obigen Zahlen die *mittlere* Geschwindigkeit angeben.

Das Perihel des *Jupiters* bewegt sich um 360° in 376 700 Julianischen Jahren, dasjenige des *Saturns* in 58 750 solchen Jahren.

Entwickelt man die obigen Ausdrücke für $e \cos\pi$ und $e \sin\pi$ nach den Potenzen von t, so erhält man die Reihen

$$e \cos\pi = r_0 + \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{\underline{|2}} \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)_0 t^2 + \ldots,$$
$$e \sin\pi = s_0 + \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{\underline{|2}} \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)_0 t^2 + \ldots,$$

und es wird

$$\log r_0 = 8.6740\,,$$

$$\log s_0 = 7.9981\,,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = +\,0''.1943\,,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = +\,0''.3476\,,$$

also Werthe, die mit den im vorigen Paragraphen erhaltenen übereinstimmen.

Nach Formel (16) erhalten wir folgende Grenzwerthe für die Excentricitäten

$$♃ \qquad 0.0276 < e < 0.0592\,,$$

$$♄ \qquad 0.0132 < e' < 0.0840\,,$$

welche Grenzen nicht viel von den Maximal- und Minimalwerthen für e und e' abweichen, die man findet, wenn der Einfluss sämmtlicher Planeten berücksichtigt wird. Die Periode für die Excentricitäten beträgt

$$\frac{360^\circ}{g_1 - g_2} = 69\,600 \text{ Jahre.}$$

Die Richtung der Bewegung der Perihelien ist eine directe („vorwärts“), d. h. fällt mit der Bewegungsrichtung der Planeten überein, wie es nach dem obigen immer der Fall sein muss.

§ 5. Fortsetzung. Seculare Störungen der Neigungen und der Knoten. Bedeutung der unveränderlichen Ebene.

Die Differentialgleichungen, welche die Bewegung der Bahnebene bestimmen, waren

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \varkappa_1\,(v - v'), \\ \frac{dv}{dt} &= -\,\varkappa_1\,(u - u'), \\ \frac{du'}{dt} &= -\,\varkappa_1'\,(v - v'), \\ \frac{dv'}{dt} &= \varkappa_1'\,(u - u'). \end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man die folgenden ab:

$$(2)\quad \begin{cases} u\dfrac{du}{dt} + v\dfrac{dv}{dt} = \quad \varkappa_1 (vu' - uv'), \\ u'\dfrac{du'}{dt} + v'\dfrac{dv'}{dt} = - \varkappa_1' (vu' - uv'), \end{cases}$$

woraus

$$(3)\quad \varkappa_1'\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt}\right) + \varkappa_1\left(u'\frac{du'}{dt} + v'\frac{dv'}{dt}\right) = 0.$$

Weiter bekommt man unmittelbar

$$(4)\quad \begin{cases} \varkappa_1'\dfrac{du}{dt} + \varkappa_1\dfrac{du'}{dt} = 0, \\ \varkappa_1'\dfrac{dv}{dt} + \varkappa_1\dfrac{dv'}{dt} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) und (4) können unmittelbar integrirt werden, und man erhält

$$(5)\quad \begin{cases} \varkappa_1' u + \varkappa_1 u' = c_1, \\ \varkappa_1' v + \varkappa_1 v' = c_2, \\ \varkappa_1'(u^2 + v^2) + \varkappa_1(u'^2 + v'^2) = c_3, \end{cases}$$

wo c_1, c_2 und c_3 drei Integrationsconstanten bezeichnen.

Die Relationen (5) entsprechen in diesem Falle den Flächenintegralen. Um dies zu beweisen, gehen wir zu den allgemeinen Ausdrücken für diese Integrale V § 9 (13) zurück, welche lauten

$$(6)\quad \begin{cases} \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \sin \Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \sin \Omega' = \quad c_1'', \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\sin i \cos \Omega + \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin i' \cos \Omega' = - c_2'', \\ \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i \qquad \beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i' \qquad = \quad c_3''. \end{cases}$$

Wenn wir uns erinnern, dass

$$u = \sin i \cos \Omega, \quad v = \sin i \sin \Omega,$$
$$u' = \sin i' \cos \Omega', \quad v' = \sin i' \sin \Omega',$$

und die linke Seite von (6) nach Potenzen von u, v, u', v' entwickeln, so bekommen wir aus den beiden ersten Gleichungen (6), indem wir die Glieder dritten Grades vernachlässigen,

$$(7)\qquad \begin{cases} \beta\sqrt{a}\,v+\beta'\sqrt{a'}\,v' = c_1'', \\ \beta\sqrt{a}\,u+\beta'\sqrt{a'}\,u' = -c_2''. \end{cases}$$

Nun ist aber nach § 3 (16)

$$\beta\sqrt{a} = k^2 m m'\cdot\frac{M}{n a m'},$$

und wird der Werth § 3 (17) für $\varkappa_1$ und $\varkappa_1'$ berücksichtigt, so finden wir in der That, dass die Gleichungen (7) mit den beiden ersten Gleichungen (5) zusammenfallen.

Die dritte Gleichung (5) ist offenbar nur als ein Theil der dritten Gleichung (6) anzusehen.

Wird im Besonderen die unveränderliche Ebene als Grundebene benutzt, dann sind c_1'' und c_2'', also auch c_1 und c_2, gleich Null, und nach (5) hat man dann

$$(8)\qquad \frac{u}{u'}=\frac{v}{v'}=-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1'}.$$

Schreiben wir dies in der Form

$$(8^*)\qquad \frac{u}{v}=\frac{u'}{v'},$$

so folgt also, dass

$$(9)\qquad \operatorname{tg}\Omega=\operatorname{tg}\Omega'.$$

Die Knotenlinien der beiden Planetenbahnen auf der unveränderlichen Ebene fallen also zusammen. Dies ist das bekannte Theorem von Jacobi, das, wie in V § 9 bewiesen wurde, für alle Potenzen von u, v u. s. w. seine Gültigkeit behält. Wir haben also

$$(10)\qquad \Omega=\Omega'+180^0.$$

Man kann aber hier noch einen wichtigen Satz ableiten, dass

nämlich *die Neigungen der beiden Bahnen gegen die unveränderliche Ebene constant bleiben.*

Es ist in der That nach (8)

$$v u' - u v' = 0,$$

und also nach (2)

$$u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$u' \frac{du'}{dt} + v' \frac{dv'}{dt} = 0,$$

welche Gleichungen den betreffenden Satz enthalten.

Man hat also hier eine einzige Grösse zu bestimmen, nämlich die *Bewegung der gemeinsamen Knotenlinie auf der unveränderlichen Ebene.*

Man hat aber

$$\sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} = - v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt}, \tag{10*}$$

und, wenn man die Ausdrücke (1) für $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ einsetzt,

$$\sin^2 i \frac{d\Omega}{dt} = - \varkappa_1 (u^2 + v^2) + \varkappa_1 (u u' + v v'),$$

oder nach (8), und, indem man durch die Grösse

$$\sin^2 i = u^2 + v^2$$

dividirt,

$$\frac{d\Omega}{dt} = - (\varkappa_1 + \varkappa_1'). \tag{11}$$

Die gemeinsame Knotenlinie bewegt sich also mit gleichförmiger Geschwindigkeit rückwärts und zwar jährlich um den Werth $\varkappa_1 + \varkappa_1'$.

Wird statt der unveränderlichen Ebene eine andere XY-Ebene gewählt, so wird die Bewegung scheinbar complicirter herausfallen. Wir haben in § 3 gefunden, dass die Knotenlinie der Jupitersbahn auf der Ekliptik 1850.0 sich augenblicklich um 6″.233 *vorwärts* bewegt, und dass der Knoten der Bahn von Saturn sich in einem Jahre um 8″.859 *rückwärts* bewegt. Man könnte diese Zahlen leicht aus dem eben bewiesenen Satz (11) ableiten.

Die Bestimmung der Lage der unveränderlichen Ebene geschieht mit Hilfe der Gleichungen V § 1 (20)

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma \sin\Pi = \dfrac{c_1''}{c_3''}, \\ \operatorname{tg}\gamma \cos\Pi = -\dfrac{c_2''}{c_3''}, \end{cases}$$

wo c_1'', c_2'' und c_3'' aus (6) berechnet werden. Es bedeutet hier γ die Neigung der unveränderlichen Ebene gegen die XY-Ebene (z. B. die Ekliptik) und Π die Länge des aufsteigenden Knotens auf dieser Ebene.

Beispiel. Wollen wir diese Formeln auf das System *Sonne—Jupiter—Saturn* benutzen, so erhält man zuerst aus (6) mit Anwendung der Zahlen in § 3

$$c_1'' = +\ 109.65\,,$$
$$c_2'' = +\ 28.93\,,$$
$$c_3'' = +\ 3962.0\,,$$

und hieraus nach (12)

$$\Pi = 104^\circ.78\,,$$
$$\gamma = 1^\circ.64\,,$$

Zahlen, die nicht viel von denjenigen abweichen, die man, unter Berücksichtigung sämmtlicher Planeten für die Lage der unveränderlichen Ebene in unserem Planetensystem erhält.

Die Bewegung der gemeinsamen Knotenlinie auf der unveränderlichen Ebene wird nach (11) erhalten. Es ist nun

$$\varkappa_1 = 7''.35\,,$$
$$\varkappa_1' = 18''.15\,,$$

also

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\ 25''.50\,.$$

Für die Neigung der Bahnen von Jupiter und Saturn gegen die unveränderliche Ebene erhalten wir die Werthe

♃ $\quad i_1 = 0^\circ.362\,,$

♄ $\quad i_1' = 0^\circ.890\,,$

und für die (gegenwärtigen) Längen der Knoten

$$♃ \qquad \Omega_1 = 306^\circ.38\,,$$
$$♄ \qquad \Omega_1' = 126^\circ.38\,.$$

Diese Zahlen werden durch eine trigonometrische Rechnung aus den Werthen in § 3 für i, Ω, i', Ω' abgeleitet. Wir werden die hierfür erforderlichen Formeln in einem der folgenden Paragraphen geben.

§ 6. Beliebige Zahl von Planeten. Seculare Störungen der elliptischen Bahn.

Wir haben in § 2 die allgemeine Form des secularen Theiles der Störungsfunction gegeben, wenn eine beliebige Zahl von Planeten vorhanden ist. Führen wir die Bezeichnungen

$$(1) \qquad \begin{cases} (i,j) = \quad \frac{1}{4}\frac{m_i m_j}{A_i} B_1(a_i,\, a_j) \\ [i,j] = -\frac{1}{4}\frac{m_i m_j}{\sqrt{A_i A_j}} B_2(a_i,\, a_j) \end{cases} \qquad (i \neq j),$$

und

$$(1^*) \qquad [i,\, i] = (i,\, 1) + (i,\, 2) + \ldots + (i,\, n)$$

ein, so kann man den von den Excentricitäten abhängigen Theil von $[F]$, den wir mit $[F]_1$ bezeichnen, in der Form

$$(2) \qquad [F]_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i,\, j](\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j)$$

schreiben. Die entsprechenden Differentialgleichungen lauten:

$$(3) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial [F]_1}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial [F]_1}{\partial \xi_i}$$
$$(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

Würden in $[F]_1$ nur die Quadrate von ξ und η vorkommen, so dass

$$F_1 = \frac{1}{2}\sum C_i(\xi_i^2 + \eta_i^2),$$

so würden die Gleichungen (3) die Form

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_\iota}{dt} = \quad C_\iota \eta_\iota, \\[2ex] \dfrac{d\eta_\iota}{dt} = - C_\iota \xi_\iota \end{cases}$$

annehmen, und das Integral könnte dann unmittelbar hingeschrieben werden.

Nun haben wir aber in I § 4 bewiesen, dass eine quadratische Form — wie es $[F]_1$ nach (2) ist — durch eine orthogonale Substitution in eine Summe von nur Quadraten umgeformt werden kann. Und da es leicht zu zeigen ist, dass bei einer orthogonalen Substitution die canonische Form der Differentialgleichungen beibehalten wird, so lassen sich also die Gleichungen (3) in die Form (4) überführen.

Wir führen also statt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die neuen Veränderlichen $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$ durch die folgenden Gleichungen ein:

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \gamma_{11}\Xi_1 + \gamma_{12}\Xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\Xi_n, \\ \xi_2 = \gamma_{21}\Xi_1 + \gamma_{22}\Xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\Xi_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_n = \gamma_{n1}\Xi_1 + \gamma_{n2}\Xi_2 + \cdots + \gamma_{nn}\Xi_n, \end{cases}$$

wo, weil die Substitution orthogonal ist nach I § 4, zwischen den Coefficienten die Relationen

$$(6) \qquad \sum_{\iota=1}^{n} \gamma_{\iota\mu}\gamma_{\iota\nu} = 0 = \sum_{\iota=1}^{n} \gamma_{\mu\iota}\gamma_{\nu\iota} \qquad (\mu \neq \nu),$$

$$(6^*) \qquad \sum_{\iota=1}^{n} \gamma_{\iota\mu}^2 = 1 = \sum \gamma_{\mu\iota}^2$$

bestehen. Hieraus folgt nun, dass umgekehrt

$$(7) \qquad \begin{cases} \Xi_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{21}\xi_2 + \cdots + \gamma_{n1}\xi_n, \\ \Xi_2 = \gamma_{12}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{n2}\xi_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Xi_n = \gamma_{1n}\xi_1 + \gamma_{2n}\xi_2 + \cdots + \gamma_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

Statt der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ führen wir gleichfalls die neuen Veränderlichen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ein und zwar durch dieselbe Substitution (also mit *denselben* Coefficienten γ_{ij}).

Wir wollen zuerst beweisen, dass die canonische Form der Differentialgleichungen auch für die neuen Veränderlichen gilt.

In VI § 1 haben wir bewiesen, dass hierfür erforderlich ist, dass

$$(8) \qquad \begin{cases} [\Xi_i, \Xi_r] = [Y_i, Y_r] = 0, \\ [\Xi_i, Y_r] = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq r \\ +1 \quad ,, \quad i = r \end{cases}, \end{cases}$$

wo wir folgende Bezeichnung angewandt haben:

$$(8^*) \qquad [a, b] = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_s} \frac{\partial b}{\partial \eta_s} - \frac{\partial a}{\partial \eta_s} \frac{\partial b}{\partial \xi_s} \right).$$

Nun ist aber nach (7)

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial \xi_s} = \gamma_{si}, \qquad \frac{\partial \Xi_i}{\partial \eta_s} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_r}{\partial \xi_s} = 0, \qquad \frac{\partial Y_r}{\partial \eta_s} = \gamma_{sr},$$

so dass wir unmittelbar erhalten

$$[\Xi_i, \Xi_r] = 0 = [Y_i, Y_r],$$

$$[\Xi_i, Y_r] = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{si} \gamma_{sr},$$

welche Summe nach (6) gleich Null ist, wenn $i \neq r$, und gleich der Einheit, wenn $i = r$. Die orthogonale Substitution ist also canonisch.

Wir haben in I § 4 gesehen, dass wir durch eine geeignete Bestimmung der Coefficienten γ_{ij} erhalten

$$(9) \qquad \tfrac{1}{2} \sum [i, j] \xi_i \xi_j = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i \Xi_i^2.$$

Die Coefficienten s_i sind als Wurzeln der *Fundamentalgleichung*

$$(10) \qquad D = \begin{vmatrix} [1,1]-s, & [1,2], \ldots, [1,n] \\ [2,1], & [2,2]-s, \ldots, [2,n] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ [n,1], & [n,2], \ldots, [n,n]-s \end{vmatrix} = 0$$

gegeben. Ist s_ν eine beliebige Wurzel dieser Gleichung, so werden die entsprechenden γ-Coefficienten — $\gamma_{i\nu}$ — aus dem folgenden System von Gleichungen bestimmt:

$$(11) \begin{cases} ([1,1]-s_\nu)\gamma_{1\nu} + [1,2]\gamma_{2\nu} + \ldots + [1,n]\gamma_{n\nu} = 0, \\ [2,1]\gamma_{1\nu} + ([2,2]-s_\nu)\gamma_{2\nu} + \ldots + [2,n]\gamma_{n\nu} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [n,1]\gamma_{1\nu} + [n,2]\gamma_{2\nu} + \ldots + ([n,n]-s_\nu)\gamma_{n\nu} = 0, \end{cases}$$

wozu noch die aus (6*) erhaltene Gleichung

$$(11^*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i\nu}^2 = 1$$

kommt.

Die Differentialgleichungen für die neuen Veränderlichen sind nun von der Form

$$(12) \qquad \frac{d\Xi_i}{dt} = \frac{\partial [F]_1}{\partial Y_i}, \qquad \frac{dY_i}{dt} = -\frac{\partial [F]_1}{\partial \Xi_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo nach (9) und (2)

$$(12^*) \qquad [F]_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i (\Xi_i^2 + Y_i^2),$$

und es wird also

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Xi_i}{dt} = s_i Y_i \\ \dfrac{dY_i}{dt} = -s_i \Xi_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Integrale dieser Gleichungen lauten:

$$(14) \qquad \begin{cases} \Xi_i = M_i \cos(s_i t + \beta_i) \\ Y_i = -M_i \sin(s_i t + \beta_i) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $M_1, \ldots, M_n$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die Integrationsconstanten bezeichnen. Setzt man nun endlich diese Ausdrücke in (5) ein, so erhalten wir

$$(15)\quad \begin{cases} \xi_1 = \gamma_{11} M_1 \cos(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{12} M_2 \cos(s_2 t + \beta_2) + \ldots + \\ \qquad\qquad + \gamma_{1n} M_n \cos(s_n t + \beta_n), \\ \xi_2 = \gamma_{21} M_1 \cos(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{22} M_2 \cos(s_2 t + \beta_2) + \ldots + \\ \qquad\qquad + \gamma_{2n} M_n \cos(s_n t + \beta_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \gamma_{n1} M_1 \cos(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{n2} M_2 \cos(s_2 t + \beta_2) + \ldots + \\ \qquad\qquad + \gamma_{nn} M_n \cos(s_n t + \beta_n), \end{cases}$$

und

$$\eta_1 = -\gamma_{11} M_1 \sin(s_1 t + \beta_1) - \gamma_{12} M_2 \sin(s_2 t + \beta_2) - \ldots -$$
$$- \gamma_{1n} M_n \sin(s_n t + \beta_n),$$

u. s. w.

womit die Integration vollständig ausgeführt ist.

Es lassen sich nun aus den Eigenschaften der orthogonalen Substitution gewisse allgemeine Schlüsse über die Integrale ziehen.

Erstens haben wir in I § 4 gesehen, dass sämmtliche Wurzeln s_ν der Fundamentalgleichung (10) *reell* sind.

Man kann auch beweisen, dass dieselben alle *positiv* sein müssen. Zu dem Zweck wollen wir zeigen, dass $[F]$ für alle Werthe von $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $\eta_1, \ldots, \eta_n$ und also auch für alle Werthe von $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$; $Y_1, \ldots, Y_n$ einen positiven Werth haben muss. Es ist dabei vorausgesetzt, dass es sich nur um diejenigen Glieder in $[F]$ handelt, die von ξ_i und η_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ abhängig sind.

Nach § 2 ist nämlich

$$[F]_1 = \sum R_2'(\xi_i, \xi_j) + \sum R_2'(\eta_i, \eta_j),$$

wo

$$R_2'(x_i, x_j) = k^2 m_i m_j \left\{\tfrac{1}{8} B_1(a_i, a_j)\left[\frac{x_i^2}{A_i} + \frac{x_j^2}{A_j}\right] - \tfrac{1}{4} B_2(x_i, x_j)\frac{x_i x_j}{\sqrt{A_i A_j}}\right\}.$$

Diesen Ausdruck kann man aber in der Form

$$(16)\quad \begin{cases} R_2'(x_i, x_j) = \dfrac{k^2 m_i m_j}{8}\Big\{B_2(a_i, a_j)\left[\dfrac{x_i^2}{A_i} + \dfrac{x_j^2}{A_j} - \dfrac{2 x_i x_j}{\sqrt{A_i A_j}}\right] \\ \qquad\qquad + (B_1(a_i, a_j) - B_2(a_i, a_j))\left(\dfrac{x_i^2}{A_i} + \dfrac{x_j^2}{A_j}\right)\Big\} \\ \quad = \dfrac{k^2 m_i m_j}{8}\Big\{B_2\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{A_i}} - \dfrac{x_j}{\sqrt{A_j}}\right)^2 \\ \qquad\qquad + (B_1 - B_2)\left(\dfrac{x_i^2}{A_i} + \dfrac{x_j^2}{A_j}\right)\Big\} \end{cases}$$

schreiben. Da indessen nach § 4 (9) $B_1(a_i, a_j)$ grösser als $B_2(a_i, a_j)$ ist, so findet man hieraus, dass $R_2'(x_i, x_j)$ stets positiv ist, und folglich ist auch $[F]$ stets positiv.

Führt man die Veränderlichen Ξ_i und Y_i ein, so ist andererseits

$$[F]_1 = \tfrac{1}{2}\sum s_i(\Xi_i^2 + Y_i^2),$$

welcher Ausdruck also für alle Werthe von $\Xi_1, \ldots, \Xi_n;\; Y_1, \ldots, Y_n$ positiv sein muss, was offenbar nur möglich ist, wenn sämmtliche Coefficienten $s_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ positiv sind.

Das Zeichen der Grössen s_i steht mit der Bewegungsrichtung der Perihelien in engem Zusammenhang. Weil die Grössen s_i positiv sind, so folgt nämlich, dass die mittlere Bewegung der Perihelien, wenn eine solche existirt, auch positiv sein muss.

Da genähert

$$\xi = \sqrt{A}\, e \cos \pi,$$
$$\eta = -\sqrt{A}\, e \sin \pi,$$

so ist, nach (15),

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt{A_i}\, e_i \cos \pi_i = \gamma_{i1} M_1 \cos(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{i2} M_2 \cos(s_2 t + \beta_2) + \\ \qquad\qquad + \ldots + \gamma_{in} M_n \cos(s_n t + \beta_n), \\ \sqrt{A_i}\, e_i \sin \pi_i = \gamma_{i1} M_1 \sin(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{i2} M_2 \sin(s_2 t + \beta_2) + \\ \qquad\qquad + \ldots + \gamma_{in} M_n \sin(s_n t + \beta_n). \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben

$$(18)\quad \begin{cases} A_i e_i^2 = \gamma_{i1}^2 M_1^2 + \ldots + \gamma_{in}^2 M_n^2 + \\ \qquad\qquad + 2\sum \gamma_{ik}\gamma_{il} M_k M_l \cos(\widehat{g_k - g_l}\, t + \beta_k - \beta_l), \end{cases}$$

und

$$(19)\quad \operatorname{tg} \pi_i = \frac{\gamma_{i1} M_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \ldots + \gamma_{in} M_n \sin(g_n t + \beta_n)}{\gamma_{i1} M_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \ldots + \gamma_{in} M_n \cos(g_n t + \beta_n)},$$

woraus e_i und π_i berechnet werden können.

Aus (18) folgt, mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (6) und (6*), dass

$$(20)\quad \sum_{i=1}^{n} A_i e_i^2 = M_1^2 + \ldots + M_n^2,$$

welche Gleichung den schon behandelten Stabilitätsbeweis von LAPLACE für die Excentricitäten enthält.

Dass thatsächlich eine mittlere Bewegung der Perihelien existirt — und zwar eine *positive* —, würde man wahrscheinlich allgemein aus (19) oder (17) ableiten können. Es liegt indessen bis jetzt kein solcher Beweis vor, und nur unter speciellen Annahmen in Bezug auf die Coefficienten, die indessen für das Planetensystem von grosser Bedeutung sind, ist die Bewegung des Perihels näher studirt worden.

Der wichtigste von diesen Fällen ist der, dass *einer von den Coefficienten* $\gamma_{ik} M_k$ *grösser ist als die Summe aller anderen.* Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Coefficienten alle *positiv* genommen werden.

Wir nehmen z. B. an, dass

$$(21)\quad |\gamma_{i1} M_1| > |\gamma_{i2} M_2| + \ldots + |\gamma_{in} M_n|,$$

und wir können dann beweisen, *dass das Perihel die mittlere Bewegung* g_1 *besitzt.*

Wir bekommen in der That aus (17)

$$(22^*)\quad \begin{cases} \sqrt{A_i}\, e_i \cos(\pi_i - g_1 t - \beta_1) = \gamma_{i1} M_1 + \sum_{k=2}^{n} \gamma_{ik} M_k \cos(\widehat{g_k - g_1}\, t + \beta_k - \beta_1), \\ \sqrt{A_i}\, e_i \sin(\pi_i - g_1 t - \beta_1) = \qquad \sum_{k=2}^{n} \gamma_{ik} M_k \sin(\widehat{g_k - g_1}\, t + \beta_k - \beta_1), \end{cases}$$

und also

$$(22) \qquad \operatorname{tg}(\pi - g_1 t - \beta_1) = \frac{\sum \gamma_{ik} M_k \sin(\widehat{g_k - g_1}\, t + \beta_k - \beta_1)}{\gamma_{i1} M_1 + \sum \gamma_{ik} M_k \cos(\widehat{g_k - g_1}\, t + \beta_k - \beta_1)}.$$

In Folge der Ungleichheit (21) kann der Nenner in (22) nie gleich Null werden, und folglich wird $\operatorname{tg}(\pi_i - g_1 t - \beta_1)$ niemals unendlich. Das Perihel hat demnach die mittlere Bewegung g_1. Aus (22*) findet man, dass $\cos(\pi_i - g_1 t - \beta_1)$ dasselbe Zeichen hat wie $\gamma_{i1} M_1$. Setzt man also

$$(23) \qquad \pi_i = g_1 t + \beta_1' + P,$$

wo

$$\beta_1' = \beta_1,$$

wenn $\gamma_{i1} M_1$ positiv ist, und

$$\beta_1' = \beta_1 + 180^0,$$

wenn $\gamma_{i1} M_1$ negativ ist, so muss P *immer numerisch kleiner als* 90^0 *bleiben.* Die Richtung des Perihels weicht also immer weniger als 90^0 von derjenigen Richtung ab, welche von einer Linie angegeben wird, die mit der X-Achse einen Winkel gleich $g_1 t + \beta_1'$ bildet.

Unter den grossen Planeten, die um die Sonne kreisen, ist die Ungleichheit (21) für alle Planeten erfüllt mit Ausnahme der *Erde* und der *Venus.* Es ist indessen wahrscheinlich, dass auch diese Planeten eine mittlere Bewegung (positiv) besitzen, obgleich die Schwankungen hier mehr als 90^0 betragen können.

Ist die Ungleichheit (21) nicht erfüllt, so scheint die Behandlung des Problems nicht mehr so leicht. Ich verdanke Herrn C. B. S. Cavallin aus Oestersund folgende interessante Bemerkungen, welche, obgleich dieselben das Problem nicht endgültig lösen, vielleicht den richtigen Weg zur Behandlung der Frage anzeigen.

Gesetzt

$$x = \pi_i; \quad y = \sqrt{A_i}\, e_i, \quad A_r = \gamma_{ir} M_r,$$

so erhalten wir aus (17), indem man die zweite Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt und die Gleichungen addirt,

$$y\,e^{s\sqrt{-1}} = \sum_{r=1}^{n} A_r\, e^{\sqrt{-1}(g_r t + \beta_r)}, \tag{24}$$

wo t eine reelle unabhängige Veränderliche bezeichnet, und A_r, g_r und β_r reelle und constante Grössen sind. Es ist weiter erlaubt anzunehmen, dass die Coefficienten A_r von Null verschieden sind.

Cavallin macht über die Grössen $g_1, \ldots, g_n$ die Annahme, dass sie *rationale Zahlen* sind, was zwar nicht allgemein gültig ist, jedoch insofern berechtigt ist, als man besonders bei numerischen Rechnungen *näherungsweise* diese Annahme machen kann.

Wir nehmen nun an, dass die rationalen Zahlen g als Brüche mit demselben Nenner geschrieben werden, also

$$g_1 = \frac{m_1}{m}, \quad g_2 = \frac{m_2}{m}, \ldots, g_n = \frac{m_n}{m}, \tag{25}$$

und setzen noch

$$A_r' = A_r\, e^{\sqrt{-1}\,\beta_r}, \tag{26}$$

so dass

$$y\,e^{\sqrt{-1}\,s} = \sum_{r=1}^{n} A_r'\, e^{\sqrt{-1}\frac{m_r}{m} t}. \tag{27}$$

Wir nehmen ausserdem an, dass die Grössen g_r von einander verschieden, und nach der Grösse so geordnet sind, dass

$$g_1 > g_2 > \cdots > g_n, \tag{28}$$

woraus

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_n. \tag{28*}$$

Setzt man nun

$$z = e^{\frac{\sqrt{-1}\,t}{m}}, \tag{29*}$$

so lautet die rechte Seite von (27)

$$\sum A_r' z^{m_r} = A_1' z^{m_n} \left\{ z^{\mu_1} + \frac{A_2'}{A_1'} z^{\mu_2} + \ldots + \frac{A_n'}{A_1'} \right\}, \tag{29}$$

da A_1' von Null verschieden ist. Hier ist

$$\mu_1 = m_1 - m_n, \quad \mu_2 = m_2 - m_n, \ldots, \tag{30}$$

und also nach (28)

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots$$

Werden die Wurzeln der Gleichung von dem μ_1^{ten} Grad

$$(31) \qquad z^{\mu_1} + \frac{A_2'}{A_1'} z^{\mu_2} + \dots + \frac{A_n'}{A_1'} = 0,$$

von welchen keine gleich Null ist, da $A_n' \neq 0$, mit

$$e^{\frac{\sqrt{-1}\lambda_1}{m}}, \; e^{\frac{\sqrt{-1}\lambda_2}{m}}, \dots, e^{\frac{\sqrt{-1}\lambda_n}{m}}$$

bezeichnet, so wird

$$y e^{\sqrt{-1}x} = A_1' e^{\frac{\sqrt{-1} m_n t}{m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left(e^{\frac{\sqrt{-1} t}{m}} - e^{\frac{\sqrt{-1} \lambda_r}{m}} \right)$$

$$= A_1' e^{\frac{\sqrt{-1} m_n t}{m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} 2\sqrt{-1}\, e^{\frac{\sqrt{-1}(t+\lambda_r)}{2m}} \frac{\left(e^{\frac{\sqrt{-1}(t-\lambda_r)}{2m}} - e^{-\frac{\sqrt{-1}(t-\lambda_r)}{2m}} \right)}{2\sqrt{-1}},$$

oder

$$(32) \qquad y e^{\sqrt{-1}x} = (2\sqrt{-1})^{\mu_1} A_1' e^{\frac{\sqrt{-1}(2m_n+\mu_1)t}{2m} + \frac{\sqrt{-1}\sum\lambda}{2m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin\frac{t-\lambda_r}{2m}.$$

Wird diese Gleichung logarithmisch differentiirt, so bekommt man, indem man in Betracht zieht, dass $2m_n + \mu_1 = m_1 + m_n$,

$$(33) \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} + \sqrt{-1}\frac{dx}{dt} = \sqrt{-1}\,\frac{m_1+m_n}{2m} + \frac{1}{2m}\sum_{r=1}^{\mu_1} \operatorname{cotg}\frac{t-\lambda_r}{2m}.$$

Da sowohl x und y, wie auch $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ reelle Grössen sind, so braucht man also nur in der rechten Seite von (33) die reellen Glieder von den imaginären zu trennen, um die Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ zu bekommen.

Bevor wir diese Trennung ausführen, wollen wir die Bemerkung machen, dass, da die Unendlichkeitspunkte der Cotangensfunctionen gleich 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... sind, $\operatorname{cotg}\frac{t-\lambda_r}{2m}$ niemals unendlich wird für andere Werthe für λ_r als solche, die reell sind.

Setzen wir also

$$(34) \qquad \frac{1}{2m}\sum_{r=1}^{m}\operatorname{cotg}\frac{t-\lambda_r}{2m} = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\psi(t),$$

so finden wir, dass $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ periodische Functionen mit der Periode $2m\pi$ sind, und dass $\psi(t)$ *immer endlich ist.* Aus (33) und (34) folgen die Gleichungen

$$(35) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{m_1 + m_n}{2m} + \psi(t) = \frac{g_1 + g_n}{2} + \psi(t)$$

und

$$(35^*) \qquad \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \varphi(t).$$

Herr CAVALLIN bemerkt, dass man mittelst einer von den vielen Methoden, die zu Gebote stehen, um die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu berechnen, die Function

$$\sum_{r=1}^{n}\operatorname{cotg}\frac{t-\lambda_r}{2m}$$

bestimmen, und dann durch Trennung der reellen und der imaginären Theile die Functioneu $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ finden kann. Er hat indessen diese Berechnung nicht ausgeführt.[1]

Da die Function $\psi(t)$ periodisch ist und nie (für reelle Werthe von t) unendlich werden kann, so lässt sie sich in eine FOURIER'sche Reihe entwickeln. Hieraus folgt, dass *das Perihel eine mittlere Bewegung besitzt.* Wird das constante Glied mit K_0 bezeichnet, so ist der Werth dieser mittleren Bewegung gleich

$$\frac{g_1 + g_n}{2} + K_0 \,.$$

§ 7. Beliebige Zahl von Planeten. Seculare Störungen der Bahnebenen.

Die Discussion der secularen Störungen der Neigungen und der Knotenlängen geschieht in ähnlicher Weise, wie im vorigen

[1] Nachdem das Obige geschrieben wurde, hat Herr CAVALLIN Untersuchungen über diese Frage veröffentlicht („Meddelanden från Lunds Observatorium". Nr. 19).

Paragraphen die entsprechende Untersuchung über die Excentricitäten und die Längen des Perihels. Nur wird hier von den Wurzeln der Fundamentalgleichung eine Wurzel gleich Null, und die anderen Wurzeln sind sämmtlich negativ.

Nennt man den secularen Theil der Störungsfunction, welcher von den Neigungen abhängt, $[F]_2$, so hat man nach § 2

$$(1)\qquad [F]_2 = -\sum R''(p_i,\ p_j) - \sum R''(q_i,\ q_j),$$

wo

$$(2)\qquad R''(x_i,\ x_j) = \tfrac{1}{8} k^2 m_i m_j B_1(a_i,\ a_j)\left[\frac{x_i^2}{A_i} + \frac{x_j^2}{A_j} - \frac{2 x_i x_j}{\sqrt{A_i A_j}}\right]$$

oder

$$(2^*)\qquad R''(x_i,\ x_j) = \tfrac{1}{8} k^2 m_i m_j B_1(a_i,\ a_j)\left(\frac{x_i}{\sqrt{A_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{A_j}}\right)^2.$$

Wir finden hieraus unmittelbar, dass $[F]_2$ eine wesentlich negative Form darstellt, und schliessen hieraus, dass die Wurzeln der Fundamentalgleichung negativ sein müssen, oder ausnahmsweise gleich Null.

Führen wir die Bezeichnungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} (i,\ j) = \tfrac{1}{4}\dfrac{m_i m_j}{A_i} B_1(a_i,\ a_j) \\[2ex] |i,\ j| = \tfrac{1}{4} m_i m_j \dfrac{B_1(a_i,\ a_j)}{\sqrt{A_i A_j}} \qquad (i \neq j), \\[2ex] |i,\ i| = -(i,\ 1) - (i,\ 2) - \ldots - (i,\ n) \end{cases}$$

ein, so wird

$$(4)\qquad [F]_2 = \tfrac{1}{2}\sum |i,\ j|\,(p_i p_j + q_i q_j).$$

Es ist nun

$$(4^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{d p_i}{d t} = \dfrac{\partial [F]_2}{\partial q_i} \\[2ex] \dfrac{d q_i}{d t} = -\dfrac{\partial [F]_2}{\partial p_i} \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Unter Anwendung der orthogonalen Substitution

$$
(5)\qquad \begin{cases} p_1 = \gamma_{11} P_1 + \cdots + \gamma_{1n} P_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n = \gamma_{n1} P_1 + \cdots + \gamma_{nn} P_n, \end{cases}
$$

und der ähnlichen

$$
(5^*)\qquad \begin{cases} q_1 = \gamma_{11} Q_1 + \cdots + \gamma_{1n} Q_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_n = \gamma_{n1} Q_1 + \cdots + \gamma_{nn} Q_n, \end{cases}
$$

wo zwischen den Coefficienten die Relationen § 6 (6) und (6*) bestehen, wird

$$
(4^{**})\qquad [F]_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \sigma_r (P_r^2 + Q_r^2).
$$

Die Grössen σ_r werden aus der *Fundamentalgleichung*

$$
(6)\quad D(\sigma) = \begin{vmatrix} |1,1| - \sigma, & |1,2|, & \ldots, & |1,n| \\ |2,1|, & |2,2| - \sigma, & \ldots, & |2,n| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ |n,1|, & |n,2|, & \ldots, & |n,n| - \sigma \end{vmatrix} = 0
$$

bestimmt.

Die Coefficienten γ_{ir}, welche einer Wurzel σ_r entsprechen, werden aus den Gleichungen

$$
(6^*)\qquad \begin{cases} (|1,1| - \sigma_r)\gamma_{1r} + |1,2|\gamma_{2r} + \cdots + |1,n|\gamma_{nr} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |n,1|\gamma_{1r} + |n,2|\gamma_{2r} + \cdots + (|n,n| - \sigma)\gamma_{nr} = 0 \end{cases}
$$

erhalten.

Wir wollen nun beweisen, dass die Fundamentalgleichung (6) wenigstens eine Wurzel hat, die gleich Null ist.

Nach (1) und (2*) folgt, dass, wenn man setzt

$$
\frac{p_1}{\sqrt{A_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{A_2}} = \cdots = \frac{p_n}{\sqrt{A_n}}
$$

und ebenso

$$\frac{q_1}{\sqrt{A_1}} = \frac{q_2}{\sqrt{A_2}} = \ldots = \frac{q_n}{\sqrt{A_n}},$$

$[F]_2$ verschwinden muss.

Also muss für dieses System von Werthen für $\frac{p_1}{\sqrt{A_1}}$ u. s. w. auch die Summe

$$\sum \sigma_i (P_i^2 + Q_i^2)$$

verschwinden, was aber nur möglich ist, wenn

1) *entweder* sämmtliche P_i und Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gleich Null werden, in welchem Falle nach (5) auch sämmtliche p_i und q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ verschwinden, was nicht nothwendig ist, *oder*

2) wenigstens eine von den Grössen σ_i verschwindet.

Wenn σ_1 diejenige Wurzel ist, die gleich Null wird, so hat man also folgende Ausdrücke für p_i und q_i:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} p_i &= \quad \gamma_{i1} N_1 \cos\delta_1 + \gamma_{i2} N_2 \cos(\sigma_2 t + \delta_2) + \ldots + \gamma_{in} N_n \cos(\sigma_n t + \delta_n), \\ q_i &= -\gamma_{i1} N_1 \sin\delta_1 - \gamma_{i2} N_2 \sin(\sigma_2 t + \delta_2) - \ldots - \gamma_{in} N_n \sin(\sigma_n t + \delta_n). \end{aligned} \right.$$

In ähnlicher Weise, wie im vorigen Paragraphen, schliessen wir nun, dass, wenn einer von den Coefficienten, sagen wir $\gamma_{ir} N_r$, numerisch grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen ist, der Knoten eine mittlere Bewegung gleich σ_r hat. Wäre im Besonderen

$$|\gamma_{i1} N_1| > |\gamma_{i2} N_2| + \ldots + |\gamma_{in} N_n|,$$

so würde die mittlere Bewegung des Knotens gleich Null sein, und der Knoten würde um eine feste Linie in der XY-Ebene periodisch hin und her schwanken. Es ist indessen wohl zu bemerken, dass dies nur möglich ist, wenn die unveränderliche Ebene *nicht* als Grundebene benutzt wird. Wir werden in der That finden, dass das erste Glied in (7) nicht mehr vorhanden ist, wenn die Bahnen auf die unveränderliche Ebene bezogen werden, in welchem Falle solche Schwankungen um eine *feste* Linie nicht mehr möglich sind.

Wir wollen diejenigen Werthe für $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{n1}$ aufsuchen,

welche der Wurzel $\sigma = 0$ entsprechen. Nach (6*) sind dieselben durch die Gleichungen

$$|\,i,1\,|\,\gamma_{11} + |\,i,2\,|\,\gamma_{21} + \dots + |\,i,i\,|\,\gamma_{i1} + \dots + |\,i,n\,|\,\gamma_{n1} = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

bestimmt.

Nun ist aber nach (3)

$$\sqrt{A_1}\,|\,i,1\,| + \sqrt{A_2}\,|\,i,2\,| + \dots + \sqrt{A_n}\,|\,i,n\,| = -\sqrt{A_i}\,|\,i,i\,|\,.$$

Folglich sind diese Gleichungen befriedigt, wenn man setzt

$$(7^*) \qquad \frac{\gamma_{11}}{\sqrt{A_1}} = \frac{\gamma_{21}}{\sqrt{A_2}} = \dots = \frac{\gamma_{n1}}{\sqrt{A_n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum A}}\,.$$

Nun hat man aber nach (5) und (5*)

$$P_1 = \gamma_{11}\,p_1 + \dots + \gamma_{n1}\,p_n\,,$$
$$Q_1 = \gamma_{11}\,q_1 + \dots + \gamma_{n1}\,q_n\,,$$

oder, wenn man die Werthe für γ_{i1} einsetzt

$$\sqrt{\sum A}\,P_1 = \sqrt{A_1}\,p_1 + \dots + \sqrt{A_n}\,p_n\,,$$
$$\sqrt{\sum A}\,Q_1 = \sqrt{A_1}\,q_1 + \dots + \sqrt{A_n}\,q_n\,.$$

Man hat aber

$$P_1 = N_1 \cos\delta\,,$$
$$Q_1 = -N_1 \sin\delta\,,$$

und *genähert*

$$p_r = \sqrt{A_r}\sin i_r \cos\Omega_r\,,$$
$$q_r = -\sqrt{A_r}\sin i_r \sin\Omega_r$$

also

$$(8) \quad \begin{cases} \sqrt{\sum A}\,N_1 \cos\delta_1 = A_1 \sin i_1 \cos\Omega_1 + \dots + A_n \sin i_n \cos\Omega_n\,, \\ \sqrt{\sum A}\,N_1 \sin\delta_1 = A_1 \sin i_1 \sin\Omega_1 + \dots + A_n \sin i_n \sin\Omega_n\,. \end{cases}$$

In V § 1 (20) und § 9 (13) haben wir aber gefunden, dass die Neigung γ der unveränderlichen Ebene und die Knotenlänge Π durch folgende Formeln gegeben sind

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma\cos\Pi = \dfrac{A_1 \sin i_1 \cos\Omega_1 + A_2 \sin i_2 \cos\Omega_2 + \ldots + A_n \sin i_n \cos\Omega_n}{\sum A}, \\ \operatorname{tg}\gamma\sin\Pi = \dfrac{A_1 \sin i_1 \sin\Omega_1 + A_2 \sin i_2 \sin\Omega_2 + \ldots + A_n \sin i_n \sin\Omega_n}{\sum A}; \end{cases}$$

werden diese Formeln mit (8) verglichen, so erhält man

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{N_1}{\sqrt{\sum A}}, \\ \Pi = \delta_1, \end{cases}$$

wodurch die Constanten N_1 und δ_1 eine einfache geometrische Deutung erhalten.

Ist die unveränderliche Ebene selbst als XY-Ebene angewandt, dann ist γ und nach (10) auch N_1 gleich Null und das erste Glied in (7) kommt nicht mehr vor.

Es ist aus dem Obigen einleuchtend, dass es vom mechanischen Gesichtspunkte das natürlichste ist, die Bewegungen der Bahnebenen auf die unveränderliche Ebene zu beziehen, und da die Ausdrücke für die Elemente dann auch am einfachsten ausfallen, so scheint es noch mehr zu empfehlen zu sein, diese Ebene als XY-Ebene in der Mechanik des Himmels zu benutzen. Am wenigsten ist hierfür eine solche Ebene geeignet, welche wie die mittlere Ecliptik, die man gewöhnlich als Grundebene benutzt, in Folge der secularen Störungen der Planeten selbst nicht unbedeutenden Schwankungen unterworfen ist.

§ 8. Methode von Jacobi, die Wurzeln der Fundamentalgleichung numerisch zu berechnen.

Die Fundamentalgleichung zur Bestimmung der Grössen g_i und σ_i, aus denen die mittleren Bewegungen der Perihelien und

der Knoten abgeleitet werden, ist eine algebraische Gleichung in g und σ vom Grade n, wenn n die Zahl der Planeten bezeichnet. Diese algebraische Gleichung ist in der Form einer Determinante mit n^2 Elementen gegeben. Wenn man diese Determinante in gewöhnlicher Weise entwickelt, so bekommt man eine Summe von $\underline{|n}$ Gliedern, wo jedes Glied aus n Factoren besteht. Ist die Zahl der Planeten gross, so ist die rechnerische Arbeit, die für diese Entwickelung erforderlich ist, sehr gross. Will man die secularen Störungen der 8 grossen Planeten im Planetensystem berechnen, so würde man in dieser Weise $\underline{|8} = 40320$ Glieder bekommen, jedes aus 8 Factoren bestehend, und da einige Elemente in der Determinante, nämlich diejenigen, die in der Diagonale stehen, aus zwei Gliedern bestehen, so wächst diese Zahl noch, wie STOCKWELL hervorgehoben hat, auf die doppelte. Schon die numerische Berechnung dieser Gleichung „würde mit Schwierigkeit in einem Menschenleben bewältigt werden" (STOCKWELL).

Man musste sich also nach einem indirecten und kürzeren Weg umsehen, um diese Wurzeln zu berechnen. Die Astronomen haben sich dabei gewöhnlich einer Methode bedient, welche auf die besondere Form unseres Planetensystems passt, und darin besteht, in der ersten Annäherung die secularen Störungen der inneren und der äusseren Planeten gesondert zu rechnen. Obgleich man in dieser Weise thatsächlich zu einer richtigen Bestimmung der Werthe der Wurzeln gelangt, so entbehrt jedoch die Methode der mathematischen Strenge, und steht auch vom Standpunkte des numerischen Rechnens einer Methode von JACOBI (Werke VII S. 97) nach, die wir jetzt auseinandersetzen wollen.[1]

Die Bedingungsgleichungen § 6 (11) schreiben wir in der etwas abgeänderten Form (indem wir die Zeichen der Coefficienten $[i, j]$, die nach § 6 (1) negativ sind, ändern)

---

[1] Die Methode von JACOBI ist von HARZER in seiner Arbeit über die secularen Störungen der grossen Planeten angewandt worden.

$$(1)\begin{cases}(s-[1,1])\gamma_1+\dots+ & [1,i]\gamma_i+\dots+ & [1,k]\gamma_k+\dots+ & [1,n]\gamma_n=0,\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [i,1]\gamma_1+\dots+ & (s-[i,i])\gamma_i+\dots+ & [i,k]\gamma_k+\dots+ & [i,n]\gamma_n=0,\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ [k,1]\gamma_1+\dots+ & [k,i]\gamma_i+\dots+ & (s-[k,k])\gamma_k+\dots+ & [k,n]\gamma_n=0,\\ \vdots & & & \\ [n,1]\gamma_1+\dots+ & [n,i]\gamma_i+\dots+ & [n,k]\gamma_k+\dots+ & (s-[n,n])\gamma_n=0,\end{cases}$$

und es handelt sich nun darum, die Wurzeln der Gleichung

$$(2)\qquad 0=D(s)=\begin{vmatrix} s-[1,1], & [1,2],\dots, & [1,n]\\ [2,1], & s-[2,2],\dots, & [2,n]\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ [n,1], & [n,2],\dots, & s-[n,n]\end{vmatrix}$$

zu berechnen.

Diese Determinante ist zur Diagonale symmetrisch, weil nach § 6 (1)

$$(3)\qquad [i,j]=[j,i].$$

Wenn sämmtliche Elemente der Determinante, die ausserhalb der Diagonale stehen, gleich Null wären, dann wären die Wurzeln von (2) einfach gleich $[i,i]$ $(i=1,2,\dots,n)$. Nun besteht die Methode von Jacobi eben darin, *durch geeignete Transformationen die Coefficienten ausserhalb der Diagonale zu verkleinern, so dass die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in der Diagonale sich den Wurzelwerthen beliebig nähern.*

Wir vertauschen zu dem Zweck die zwei Coefficienten γ_i und γ_k gegen zwei andere P_i und P_k, indem die anderen Coefficienten γ_r unverändert bleiben, durch die Substitution

$$(4)\qquad \begin{cases}\gamma_i=\cos\alpha\,P_i-\sin\alpha\,P_k,\\ \gamma_k=\sin\alpha\,P_i+\cos\alpha\,P_k,\end{cases}$$

wo α noch unbestimmt ist.

Betrachten wir nun die i^{te} und die k^{te} Reihe und multipliciren die erstere mit $\cos\alpha$, die letztere mit $\sin\alpha$ und addiren die Glei-

chungen, multipliciren dann die i^{te} Reihe mit $-\sin\alpha$, die k^{te} Reihe mit $\cos\alpha$ und addiren wieder, so entstehen die folgenden transformirten Gleichungen

$$0 = ([i, 1]\cos\alpha + [k, 1]\sin\alpha)\gamma_1 + \ldots + (s - [i, i]')P_i + \ldots + \\ + [i, k]' P_k + \ldots + ([i, n]\cos\alpha + [k, n]\sin\alpha)\gamma_n,$$

$$0 = (-[i, 1]\sin\alpha + [k, 1]\cos\alpha)\gamma_1 + \ldots + [k, i]' P_i + \ldots + \\ + (s - [k, k]')P_k + \ldots + (-[i, n]\sin\alpha + [k, n]\cos\alpha)\gamma_n,$$

wo, indem man die Relationen (3) berücksichtigt,

$$(5)\quad \begin{cases} [i, i]' = [i, i]\cos^2\alpha - 2[k, i]\sin\alpha\cos\alpha + [k, k]\sin^2\alpha, \\ [k, k]' = [i, i]\sin^2\alpha + 2[k, i]\sin\alpha\cos\alpha + [k, k]\cos^2\alpha, \\ [i, k]' = [i, i]\cos\alpha\sin\alpha + [k, i](\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - [k, k]\sin\alpha\cos\alpha, \\ [k, i]' = [i, k]'. \end{cases}$$

Wir verfügen nun über die Grösse α so, dass der neue Coefficient $[i, k]'$ verschwindet, wofür erforderlich ist, dass

$$(6)\qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2[i, k]}{[k, k] - [i, i]}.$$

Nach (5) hat man

$$(7)\quad \begin{cases} [i, i]' + [k, k]' = [i, i] + [k, k], \\ [i, i]' - [k, k]' = ([i, i] - [k, k])\cos 2\alpha - 2[k, i]\sin 2\alpha. \end{cases}$$

In Folge der Gleichung (6) kann die letztere Gleichung in folgender Form geschrieben werden

$$[i, i]' - [k, k]' = -\frac{2[k, i]}{\sin 2\alpha},$$

oder auch

$$[i, i]' - [k, k]' = \frac{[i, i] - [k, k]}{\cos 2\alpha}.$$

Durch Quadriren und Addiren erhält man aus diesen Gleichungen

$$([i,i]'+[k,k]')^2+([i,i]'-[k,k]')^2\cos^2 2\alpha+([i,i]'-[k,k]')\sin^2 2\alpha$$
$$=([i,i]+[k,k])^2+([i,i]-[k,k])^2+4[k,i]^2,$$

oder nach gehöriger Reduction

$$(8)\qquad [i,i]'^2+[k,k]'^2=[i,i]^2+[k,k]^2+2[k,i]^2.$$

Für alle anderen Coefficienten, welche durch die Transformation berührt werden, gelten die Gleichungen

$$(9)\qquad [i,j]'^2+[k,j]'^2=[i,j]^2+[k,j]^2.$$

Die Fundamentalgleichung (2) geht hierdurch in die folgende Form über

$$(10)\ 0=D(s)=\begin{vmatrix} s-[1,1]',\ldots, & [1,i]',\ldots, & [1,k]',\ldots, & [1,n]' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [i,1]',\ldots, & s-[i,i]',\ldots, & *\ ,\ldots, & [i,n]' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [k,1]',\ldots, & *\ ,\ldots, & s-[k,k]',\ldots, & [k,n]' \\ \vdots & & & \\ [n,1]',\ldots, & [n,i]',\ldots, & [n,k]',\ldots, & s-[n,n]' \end{vmatrix},$$

wo auch diejenigen Coefficienten, welche durch die Transformation nicht verändert worden sind, mit einem Strich oben versehen sind. Anstatt des Coefficienten $[k,i]'$, der durch (6) gleich Null gemacht worden ist, steht in (10) ein Stern. Die neue Determinante ist auch symmetrisch.

Nun besteht zwischen den Determinanten (2) und (10) der wichtige Unterschied, dass *die Summe der Quadrate der ausserhalb der Diagonale befindlichen Elemente in (10) um die Summe der Quadrate von $[i,k]$ und $[k,i]$, d. h. um $2[k,i]^2$ kleiner geworden ist als in der ursprünglichen Determinante, und dass die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Elemente sich um dieselbe Grösse vermehrt hat.*

Mit den Elementen in der Diagonale werden hier die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in (2) oder (10) verstanden.

Dieser Satz geht unmittelbar aus den Gleichungen (8) und (9) hervor, welche die ganze Theorie der Methode von Jacobi enthalten.

Die Coefficienten in der i^{ten} und k^{ten} Reihe (bez. Columne) werden durch die Transformation verändert, die übrigen aber davon nicht berührt.

Macht man auf die neuen Coefficienten eine ähnliche Transformation, so wird wieder die Summe der Quadrate der ausserhalb der Diagonale befindlichen Coefficienten um den doppelten Betrag des Quadrates der vernichteten Coefficienten verkleinert und man kann durch Wiederholung dieses Verfahrens diese Summe so klein, wie man nur will, machen, so dass sie kleiner werden kann, als jede gegebene noch so kleine Grösse.

Für die praktischen Anwendungen ist es natürlich vortheilhaft, bei jeder Transformation das grösste vorhandene Element ausserhalb der Diagonale wegzuschaffen.

Man setzt die Transformationen so lange fort, bis die Zahlen in der Diagonale eine hinreichende Annäherung an die Wurzeln geben, was man aus der Rechnung selbst beurtheilen kann. Die endgültige Berechnung der Wurzeln kann noch durch ein von Jacobi angegebenes Annäherungsverfahren beschleunigt werden.

Zur leichteren Beurtheilung der Methode gebe ich noch in abgekürzter Form die von Jacobi mitgetheilten Zahlen für die beiden ersten Annäherungen an.

Gegebenes System:

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	−5.″510	9.8655	9.1587	7.8700	7.2604	5.8767	4.2157
1	9.8655	−11″.812	10.6955	9.0999	8.3566	6.9646	5.3191
2	9.1587	10.6955	−12″.971	9.7529	8.7883	7.3812	5.7326
3	7.8700	9.0999	9.7529	−17″.596	8.8878	7.4577	5.7989
4	7.2604	8.3566	8.7883	8.8878	−7″.489	**10.8790**	9.0224
5	5.8767	6.9646	7.3812	7.4577	**10.8790**	−18″.585	9.6439
6	4.2157	5.3191	5.7326	5.7989	9.0224	9.6439	−2″.326

Die negativen Zahlen in der Diagonale sind in Secunden ausgedrückt, für die übrigen sind die Logarithmen angegeben.

Ein Blick auf das Schema zeigt, dass das grösste Element ausserhalb der Diagonale in der Reihe 4 und der Columne V steht. Das zweitgrösste kommt in Reihe 1, Columne II vor. Alle anderen Elemente sind kleiner als die Einheit. Wir wollen uns ein transformirtes System verschaffen, in dem die betreffenden Elemente nicht mehr vorkommen.

Um das Element (4, V) wegzuschaffen, hat man nach (6) den Hilfswinkel α so zu bestimmen, dass

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,[10.8790]}{18''.585 - 7''.489} = [10.1348],$$

woraus

$$\alpha = 26^{0}.88 .$$

Hieraus erhält man

Erstes transformirtes System:

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	−5″.510	9.8655	9.1587	7.8700	7.2198	6.8787ₙ	4.2157
1	9.8655	−11″.812	**10.6955**	9.0999	8.3158	7.9756ₙ	5.3191
2	9.1587	**10.6955**	−12″.971	9.7529	8.7428	8.4031ₙ	5.7326
3	7.8700	9.0999	9.7529	−17″.5962	8.8468	8.5100ₙ	5.7989
4	7.2198	8.3158	8.7428	8.8468	−3″.658	*	9.4669
5	6.8787ₙ	7.9756ₙ	8.4031ₙ	8.5100ₙ	*	−22″.421	9.5382
6	4.2157	5.3191	5.7326	5.7989	9.4669	9.5382	−2″.3259

wo ein Stern steht für das vernichtete Element. Die Zahlen in der 4ten und 5ten Reihe sind verändert worden (und also auch in der 4ten und 5ten Columne), die übrigen sind von der Transformation unberührt.

Nun wird das Element (2 I) weggeschafft, indem man den Hilfswinkel

$$\alpha = 41^{0}.67$$

benutzt. Wir bekommen somit

Zweites transformirtes System:

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	−5″.510	9.8088	9.5799$_n$	7.8700	7.2198	6.8787$_n$	4.2157
1	9.8088	−7″.397	*	9.6724	8.7175	8.3781$_n$	5.7117
2	9.5799$_n$	*	−17″.385	9.5304	8.4395	8.1009$_n$	5.4231
3	7.8700	9.6724	9.5304	−17″.596	8.8463	8.5100$_n$	5.7989
4	7.2198	8.7175	8.4395	8.8463	−3″.658	*	9.4669
5	6.8787$_n$	8.3781$_n$	8.1009$_n$	8.5100$_n$	*	−22″.421	9.5382
6	4.2157	5.7117	5.4231	5.7989	9.4669	9.5382	−2″.326

Der nächste Schritt wäre, das Element (0, I), das hier am grössten ist, wegzuschaffen u. s. w.

Die endgültigen Werthe der Wurzeln, die Jacobi erhält (die numerischen Rechnungen sind von Seidel ausgeführt worden), sind

$$s_0 = 5''.299, \qquad s_4 = 3''.715,$$
$$s_1 = 7''.574, \qquad s_5 = 22''.427,$$
$$s_2 = 17''.152, \qquad s_6 = 2''.258,$$
$$s_3 = 17''.863,$$

die nach 10 Transformationen erhalten und durch ein weiteres Annäherungsverfahren noch genauer berechnet werden.[1]

Die obigen Rechnungen Jacobi's sind vor der Entdeckung von Neptun gemacht, und beziehen sich auf die 7 älteren Planeten.

§ 9. Resultate von Stockwell, die secularen Störungen der grossen Planeten betreffend.

Die Untersuchungen von Stockwell sind in den „Smithsonian Contributions to Knowledge" Vol. XVIII (1870) enthalten.

[1] Die Abhandlung von Jacobi findet sich in Crelle's: Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30 (1846) und hat den Titel: „Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen". Werke VII, S. 97.

Er geht von den folgenden Werthen der Massen, mittleren Bewegungen und der halben grossen Achsen aus

Mercur . .	$m^{\mathrm{I}} = \frac{1}{4865751}$,	$n^{\mathrm{I}} = 5381016''.2$,	$a^{\mathrm{I}} = 0.3870987$
Venus . .	$m^{\mathrm{II}} = \frac{1}{390000}$,	$n^{\mathrm{II}} = 2106641.438$,	$a^{\mathrm{II}} = 0.7233323$
Erde . .	$m^{\mathrm{III}} = \frac{1}{368689}$,	$n^{\mathrm{III}} = 1295977.440$,	$a^{\mathrm{III}} = 1.0000000$
Mars. . .	$m^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2680637}$,	$n^{\mathrm{IV}} = 689050.9023$,	$a^{\mathrm{IV}} = 1.5236878$
Jupiter. .	$m^{\mathrm{V}} = \frac{1}{1047.879}$,	$n^{\mathrm{V}} = 109256.719$,	$a^{\mathrm{V}} = 5.202798$
Saturn . .	$m^{\mathrm{VI}} = \frac{1}{3501.6}$,	$n^{\mathrm{VI}} = 43996.127$,	$a^{\mathrm{VI}} = 9.538852$
Uranus .	$m^{\mathrm{VII}} = \frac{1}{24905}$,	$n^{\mathrm{VII}} = 15424.5094$,	$a^{\mathrm{VII}} = 19.183581$
Neptun .	$m^{\mathrm{VIII}} = \frac{1}{18780}$,	$n^{\mathrm{VIII}} = 7873.993$,	$a^{\mathrm{VIII}} = 30.03386$

Bezeichnen e^{I}, e^{II}, e^{III} u. s. w., π^{I}, π^{II}, π^{III} u. s. w. die Werthe der Excentricitäten und der Perihellängen auf das Aequinoctium 1850.0 bezogen, so nimmt er weiter folgende Werthe für die Epoche 1850.0 an:

Mercur. . .	$e^{\mathrm{I}} = 0.2056179$,	$\pi^{\mathrm{I}} = 75°\ 7'\ 0''.0$
Venus . . .	$e^{\mathrm{II}} = 0.00684184$,	$\pi^{\mathrm{II}} = 129\ 28\ 51.7$
Erde . . .	$e^{\mathrm{III}} = 0.01677120$,	$\pi^{\mathrm{III}} = 100\ 21\ 41.0$
Mars . . .	$e^{\mathrm{IV}} = 0.0931324$,	$\pi^{\mathrm{IV}} = 333\ 17\ 47.8$
Jupiter . .	$e^{\mathrm{V}} = 0.0482388$,	$\pi^{\mathrm{V}} = 11\ 54\ 53.1$
Saturn . . .	$e^{\mathrm{VI}} = 0.0559956$,	$\pi^{\mathrm{VI}} = 90\ 6\ 12.0$
Uranus . .	$e^{\mathrm{VII}} = 0.0462149$,	$\pi^{\mathrm{VII}} = 170\ 34\ 17.6$
Neptun . .	$e^{\mathrm{VIII}} = 0.00917396$,	$\pi^{\mathrm{VIII}} = 50\ 16\ 39.1$

Er giebt nun die secularen Störungen der Excentricitäten und der Neigungen in folgender Form

$$(1)\begin{cases} e^{(i)}\cos\pi^{(i)} = M_1^{(i)}\cos(s_1 t+\beta_1)+M_2^{(i)}\cos(s_2 t+\beta_2)+M_3^{(i)}\cos(s_3 t+\beta_3)+\text{etc.} \\ e^{(i)}\sin\pi^{(i)} = M_1^{(i)}\sin(s_1 t+\beta_1)+M_2^{(i)}\sin(s_2 t+\beta_2)+M_3^{(i)}\sin(s_3 t+\beta_3)+\text{etc.} \end{cases}$$

und erhält für die Coefficienten folgende Werthe:

Tafel I.

	$r = 1$	2	3	4	5	6	7	8
$s_r =$	+5″.463 803	+7″.248 427	17″.014 373	17.″784 456	0″.616 685	2″.727 659	3″.716 607	22″.460 848
$\beta_r =$	88° 0′ 38″	20° 50′ 19″	+335° 11′ 31″	+137° 6′ 36″.5	67° 56′ 35″	105° 3′ 53″	28° 8′ 46″	307° 56′ 50″
M_r^{I}	+0.1766 064	+0.0268 838	+0.0014 673	+0.0015 934	+0.0000 077	+0.0005 685	+0.0244 939	−0.0000 975
M_r^{II}	+0.0085 906	−0.0201 444	−0.0112 171	−0.0131 892	+0.0000 117	+0.0005 571	+0.0166 053	+0.0003 175
M_r^{III}	+0.0054 825	−0.0153 619	+0.0113 105	+0.0162 641	+0.0000 136	+0.0005 832	+0.0163 413	−0.0023 780
M_r^{IV}	+0.0008 418	−0.0025 451	+0.0225 719	−0.0790 650	+0.0000 219	+0.0007 765	+0.0187 954	−0.0150 371
M_r^{V}	−0.0000 090	+0.0000 106	−0.0000 011	+0.0000 011	+0.0000 636	+0.0019 436	+0.0431 601	+0.0156 383
M_r^{VI}	−0.0000 080	+0.0000 109	−0.0000 064	+0.0000 110	+0.0000.717	+0.0017 694	+0.0341 011	+0.0483 504
M_r^{VII}	+0.0000 035	−0.0000 027	+0.0000 004	−0.0000 006	+0.0015 578	+0.0297 330	−0.0448 614	+0.0018 058
M_r^{VIII}	+0.0000 001	−0.0000 001	+0.0000 000	−0.0000 000	+0.0100 389	+0.0029 105	+0.0014 205	+0.0001 365

Man hat also z. B. für *Jupiter*

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{V}} \cos \pi^{\mathrm{V}} = & - 0.0000\,090 \cos (5''.463\;803\, t + 88^\circ\; 0'\, 38'') + \\
& + 0.0000\,106 \cos (7''.248\;427\, t + 20^\circ 50'\, 19'') - \\
& - 0.0000\,011 \cos (17''.014\;373\, t + 335^\circ 11'\, 31'') + \\
& + 0.0000\,011 \cos (17''.784\;456\, t + 137^\circ\; 6'\, 36'') + \\
& + 0.0000\,636 \cos (0''.616\;685\, t + 67^\circ 56'\, 35'') + \\
& + 0.0019\,436 \cos (2''.727\;659\, t + 105^\circ\; 3'\, 53'') + \\
& + 0.0431\,601 \cos (3''.716\;607\, t + 28^\circ\; 8'\, 46'') + \\
& + 0.0156\,383 \cos (22''.460\;848\, t + 307^\circ 56'\, 50'') .
\end{aligned}
$$

Wenn in (1) ein Coefficient, sagen wir $M_r^{(i)}$, numerisch grösser ist als die Summe der absoluten Beträge der übrigen Coefficienten, so wissen wir nach § 6, dass das Perihel die mittlere Bewegung s_r besitzt. Ausserdem liegt der Werth der Excentricität dann nothwendig zwischen den Grenzen

$$
M_r - \Sigma_r' < e < M_r + \Sigma_r', \tag{2}
$$

wo Σ_r' die Summe der absoluten Beträge aller Coefficienten mit Ausnahme von M_r bezeichnet.

In Folge dieser Sätze zieht nun Stockwell aus Tafel I folgende Schlüsse in Bezug auf die secularen Störungen der Excentricitäten und der Perihellängen der grossen Planeten.

Für den Planeten *Merkur* hat man:

Maximum $e^{\mathrm{I}} = \Sigma \mid M^{\mathrm{I}} \mid = 0.2317\,185$. Die Hälfte davon ist 0.1158 593. Da diese Zahl kleiner als M_1^{I} ist, so folgt, dass M_1^{I} grösser als die Summe der übrigen Coefficienten ist; folglich hat das Perihel von Mercur eine mittlere Bewegung gleich s_1 oder 5''.463 803, und macht einen vollständigen Umlauf in 237 197 Jahren. Der Minimalwerth der Excentricität beträgt 0.1214 943.

Für den Planeten *Venus* hat man:

Maximum $e^{\mathrm{II}} = \Sigma \mid M^{\mathrm{II}} \mid = 0.0706\,329$. Die Hälfte davon ist 0.0353 164. Da keiner von den Coefficienten M_1^{II}, M_2^{II} u. s. w. diese Zahl überschreitet, [so folgt, dass das Perihel der Bahn von Venus

keine mittlere Bewegung besitzt, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich Null ist].

Für die *Erde* hat man:

Maximum $e^{III} = \Sigma \mid M^{III} \mid = 0.0677\,352$. Die Hälfte davon ist 0.0338 676. Da diese Zahl grösser als irgend einer der Coefficienten M^{III} ist, [so hat das Perihel der Erdbahn keine mittlere Bewegung, und der Minimalwerth der Excentricität ist gleich Null].

Für den Planeten *Mars* hat man:

Maximum $e^{IV} = \Sigma \mid M^{IV} \mid = 0.1396\,547$. Die Hälfte davon ist 0.0698 274. Da diese Zahl kleiner als M_4^{IV} ist, so folgt, dass das Perihel der Bahn von Mars eine mittlere Bewegung hat gleich s_4 oder 17″.784 456, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich 0.0184 753 ist. Stockwell bemerkt, dass eine kleine Aenderung in dem angenommenen Werth der Erdmasse eine beträchtliche Aenderung in den Grenzen der Excentricität und in dem Werth der mittleren Bewegung hervorrufen würde.

Für den Planeten *Jupiter* hat man:

Maximum $e^{V} = \Sigma \mid M^{V} \mid = 0.0608\,274$. Die Hälfte davon ist 0.0304 137. Da diese Zahl kleiner als M_7^{V} ist, so folgt, dass das Perihel der Bahn von Jupiter eine mittlere Bewegung hat gleich s_7 oder 3″.716 607, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich 0.0254 928 ist.

Für den Planeten *Saturn* hat man:

Maximum $e^{VI} = \Sigma \mid M^{VI} \mid = 0.0843\,289$. Die Hälfte davon ist 0.0421 644. Da diese Zahl kleiner als M_8^{VI} ist, so folgt, dass das Perihel der Bahn von Saturn eine mittlere Bewegung hat gleich s_8 oder 22″.460 848, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich 0.0123 719 ist.

Für den Planeten *Uranus* hat man:

Maximum $e^{VII} = \Sigma \mid M^{VII} \mid = 0.0779\,652$. Die Hälfte davon ist 0.0389 826. Da diese Zahl kleiner als M_6^{VII} ist, so folgt, dass das Perihel der Bahn von Uranus eine mittlere Bewegung hat gleich s_7 oder 3″.716 607, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich 0.0117 576 ist.

Für den Planeten *Neptun* hat man:

Maximum $e^{\text{VIII}} = \Sigma \mid M^{\text{VIII}} \mid = 0.0145\,066$. Die Hälfte davon ist 0.0072 533. Da diese Zahl kleiner als M_5^{VIII} ist, so folgt, dass das Perihel der Bahn von Neptun eine mittlere Bewegung hat gleich s_5 oder 0″.616 685, und dass der Minimalwerth der Excentricität gleich 0.0055 712 ist.

In der obigen Zusammenstellung habe ich die Behauptung STOCKWELL's, dass Venus und die Erde keine mittlere Bewegung des Perihels besitzen, in Klammern gesetzt, weil wir aus den vorigen Paragraphen gesehen haben, dass dies noch als eine offene Frage zu betrachten ist.

Die interessanteste Bemerkung, die sich an diese Zusammenstellung knüpft, ist, dass *die mittlere Bewegung der Bahn von Uranus mit derjenigen der Bahn von Jupiter zusammenfällt.* Mit Hilfe der Gleichungen § 6 (17) und (19) können wir hieraus schliessen, dass die Länge des Perihels der Jupiterbahn um den Werth $s_7 t + \beta_7$ periodisch schwankt, und diejenige der Bahn von Uranus um den Werth $s_7 t + \beta_7 + 180^0$. Man kann aus den genannten Gleichungen auch die Amplitude dieser Schwankungen bestimmen, und zwar findet STOCKWELL, dass sie für Jupiter $\pm 24^0 10'$, für Uranus $\pm 47^0 33'$ betragen. Die Perihellängen der Bahnen von Jupiter und Saturn können sich also höchstens bis auf $(180^0 - 24^0 10' - 47^0 33')$ $108^0 17'$ nähern, und weichen durchschnittlich 180^0 von einander ab.

Indem wir nun zu den secularen Störungen der Bahnebene übergehen, wollen wir zuerst einen wichtigen Satz über die verschiedene Form der Störungsausdrücke bei Benutzung verschiedener Grundebenen ableiten.

Ist die Wahl der XY-Ebene eine beliebige, so sind nach § 7 (7) die secularen Störungen der Bahnebene durch folgende Formeln gegeben

$$\text{(a)}\left\{\begin{aligned} p_r &= \gamma_{r1} N_1 \cos \delta_1 + \gamma_{r2} N_2 \cos(\sigma_2 t + \delta_2) + \ldots + \gamma_{rn} N_n \cos(\sigma_n t + \delta_n), \\ q_r &= -\gamma_{r1} N_1 \sin \delta_1 - \gamma_{r2} N_2 \sin(\sigma_2 t + \delta_2) + \ldots + \gamma_{rn} N_n \sin(\sigma_n t + \delta_n), \end{aligned}\right.$$

wo

$$\text{(b)}\qquad\left\{\begin{aligned} p_r &= \sqrt{A_r} \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)}, \\ q_r &= -\sqrt{A_r} \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)}, \end{aligned}\right.$$

und ausserdem war

$$
\text{(c)} \qquad \begin{cases} N_1 = \sqrt{\Sigma A}\,\mathrm{tg}\,\gamma, \\ \delta_1 = \Pi, \end{cases}
$$

wenn γ die Neigung und Π die Knotenlänge der unveränderlichen Ebene in Bezug auf die XY-Ebene bezeichnet.

Nun war aber nach § 7 (7*)

$$
\gamma_{r1} = \frac{\sqrt{A_r}}{\sqrt{\Sigma A}},
$$

so dass die Formeln (a) somit in die folgenden übergehen

$$
\begin{aligned}
\sqrt{A_r}\sin i^{(r)}\cos\Omega^{(r)} &= \sqrt{A_r}\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos\Pi + \gamma_{r2}N_2\cos(\sigma_2 t + \delta_2) + \ldots + \\
&\quad + \gamma_{rn}N_n\cos(\sigma_n t + \delta_n), \\
\sqrt{A_r}\sin i^{(r)}\sin\Omega^{(r)} &= \sqrt{A_r}\,\mathrm{tg}\,\gamma\sin\Pi + \gamma_{r2}N_2\sin(\sigma_2 t + \delta_2) + \ldots + \\
&\quad + \gamma_{rn}N_n\sin(\sigma_n t + \delta_n).
\end{aligned}
$$

Da die dritten Potenzen der Neigungen vernachlässigt worden sind, so können wir $\sin\gamma$ statt $\mathrm{tg}\,\gamma$ schreiben, und indem wir gleichzeitig die Bezeichnungen etwas abändern, um den Bezeichnungen von Stockwell näher zu kommen, bekommen wir zuletzt

$$
\text{(d)} \qquad \begin{cases}
\sin i^{(r)}\cos\Omega^{(r)} = \sin\gamma\cos\Pi + N_1^{(r)}\cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \ldots + \\
\qquad\qquad + N_{n-1}^{(r)}\cos(\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}), \\
\sin i^{(r)}\sin\Omega^{(r)} = \sin\gamma\sin\Pi + N_1^{(r)}\sin(\sigma_1 t + \delta_1) + \ldots + \\
\qquad\qquad + N_{n-1}^{(r)}\sin(\sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}).
\end{cases}
$$

Hier bedeuten $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ diejenigen Wurzeln der Fundamentalgleichung, die von Null verschieden sind.

Wir haben oben angenommen, dass die XY-Ebene willkürlich gewählt ist. Wird die Neigung und die Knotenlänge in Bezug auf die unveränderliche Ebene mit $i_0^{(r)}$ und $\Omega_0^{(r)}$ bezeichnet, so giebt das sphärische Dreieck, das von der XY-Ebene, der unveränderlichen Ebene und der Bahnebene gebildet wird, die folgenden Relationen

$$(e^*)\quad \begin{cases} \sin i_0 \sin(\Omega_0 - \Pi) = \sin i \sin(\Omega - \Pi) \\ \sin i_0 \cos(\Omega_0 - \Pi) = -\cos i \sin\gamma + \sin i \cos\gamma \cos(\Omega - \Pi). \end{cases}$$

Wird hier die dritte Potenz der Neigungen vernachlässigt, so erhält man, indem man die Gleichungen bez. mit $-\sin\Pi$, $\cos\Pi$ und mit $\cos\Pi$, $\sin\Pi$ multiplicirt und addirt

$$(e)\quad \begin{cases} \sin i_0^{(r)} \cos \Omega_0^{(r)} = \sin i^{(r)} \cos \Omega^{(r)} - \sin\gamma \cos\Pi, \\ \sin i_0^{(r)} \sin \Omega_0^{(r)} = \sin i^{(r)} \sin \Omega^{(r)} - \sin\gamma \sin\Pi. \end{cases}$$

Aus (d) und (e) erhält man somit

$$(f)\quad \begin{cases} \sin i_0^{(r)} \cos \Omega_0^{(r)} = N_1^{(r)} \cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \dots + \\ \qquad\qquad + N_{n-1}^{(r)} \cos \sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}), \\ \sin i_0^{(r)} \sin \Omega_0^{(r)} = N_1^{(r)} \sin(\sigma_1 t + \delta_1) + \dots + \\ \qquad\qquad + N_{n-1}^{(r)} \sin \sigma_{n-1} t + \delta_{n-1}). \end{cases}$$

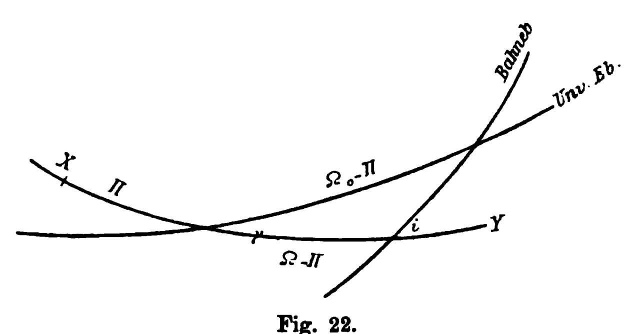


Fig. 22.

Wir sind also zu dem bemerkenswerthen Resultat gelangt, dass, wenn es sich um die secularen Störungen handelt, *der Ausdruck für $\sin i \cos\Omega$ und $\sin i \sin\Omega$, wo i und Ω die Neigung und die Knotenlänge in Bezug auf eine beliebige XY-Ebene bezeichnet, aus dem Ausdruck für $\sin i_0 \cos\Omega_0$ und $\sin i_0 \sin\Omega_0$, wo i_0 und Ω_0 die Neigung und die Knotenlänge der Bahn in Bezug auf die unveränderliche Ebene bezeichnet, einfach dadurch erhalten wird, dass man die Grössen $\sin\gamma \cos\Pi$ bez. $\sin\gamma \sin\Pi$ addirt, wo γ und Π die Neigung und die Knotenlänge der unveränderlichen Ebene, auf die XY-Ebene bezogen, bezeichnet.*

Stockwell geht von den folgenden Werthen für $i^{(r)}$ und $\Omega^{(r)}$, bezogen auf die mittlere Ekliptik 1850.0, aus:

Mercur . . .	$i^{I} = 7^\circ\ 0'\ 8''.2$,	$\Omega^{I} = 46^\circ 33'\ 3''.2$,
Venus . . .	$i^{II} = 3\ 23\ 34.4$,	$\Omega^{II} = 75\ 20\ 42.9$,
Erde . . .	$i^{III} = 0\ 0\ 0.0$,	$\Omega^{III} = 0\ 0\ 0.0$,
Mars . . .	$i^{IV} = 1\ 51\ 2.3$,	$\Omega^{IV} = 48\ 23\ 36.8$,
Jupiter . . .	$i^{V} = 1\ 18\ 40.3$,	$\Omega^{V} = 98\ 54\ 20.5$,
Saturn . . .	$i^{VI} = 2\ 29\ 22.4$,	$\Omega^{VI} = 112\ 19\ 20.6$,
Uranus . . .	$i^{VII} = 0\ 46\ 29.9$,	$\Omega^{VII} = 73\ 14\ 14.4$,
Neptun . . .	$i^{VIII} = 1\ 47\ 0.9$,	$\Omega^{VIII} = 130\ 7\ 45.3$.

Für die Lage der unveränderlichen Ebene leitet er folgende Werthe der Constanten γ und Π ab (mittelst der Gleichungen V § 1 (20))

$$\gamma = \quad 1^\circ 35' 19''.376,$$
$$\pi = 106\ 14\ \ 6.00.$$

Aus der Gleichung (e^*) erhält er nun für die Neigungen und die Knotenlängen der Planeten bezogen auf die unveränderliche Ebene folgende Werthe:

Mercur . . .	$i_0^{I} = 6^\circ 20' 58''.08$,	$\Omega_0^{I} = 34^\circ\ 8' 11''.12$,
Venus . . .	$i_0^{II} = 2\ 11\ 13.57$,	$\Omega_0^{II} = 53\ 28\ 14.10$,
Erde . . .	$i_0^{III} = 1\ 35\ 19.376$,	$\Omega_0^{III} = 286\ 14\ 6.00$,
Mars . . .	$i_0^{IV} = 1\ 40\ 43.70$,	$\Omega_0^{IV} = 355\ 10\ 27.45$,
Jupiter . . .	$i_0^{V} = 0\ 19\ 59.674$,	$\Omega_0^{V} = 316\ 21\ 41.44$,
Saturn . . .	$i_0^{VI} = 0\ 55\ 30.924$,	$\Omega_0^{VI} = 122\ 48\ 32.66$,
Uranus . . .	$i_0^{VII} = 1\ 1\ 45.27$,	$\Omega_0^{VII} = 310\ 26\ 39.78$,
Neptun . . .	$i_0^{VIII} = 0\ 43\ 24.845$,	$\Omega_0^{VIII} = 32\ 54\ 1.10$.

Für die Wurzeln $\sigma_1, \ldots, \sigma_7$, die Grössen $\delta_1, \ldots, \delta_7$ und die Coefficienten $N_r^{(i)}$ in Formel (f) erhält Stockwell folgende Werthe:

Tafel II.

	$r = 1$	2	3	4	5	6	7
σ_r	$-5''.126\,112$	$-6''.592\,128$	$-17''.393\,390$	$-18''.408\,914$	$-0''.661\,666$	$-2''.916\,082$	$-25''.934\,567$
δ_r	$21^\circ\,6'\,26''.8$	$132^\circ\,40'\,57''.8$	$292^\circ\,49'\,53''.2$	$251^\circ\,45'\,8''.6$	$20^\circ\,31'\,24''.6$	$133^\circ\,56'\,10''.8$	$306^\circ\,19'\,21''.2$
N_r^{I}	$+0.1210\,760$	$+0.0283\,520$	$+0.0015\,240$	$+0.0036\,775$	$+0.0014\,778$	$+0.0031\,283$	$-0.0002\,652$
N_r^{II}	$+0.0148\,670$	$-0.0078\,380$	$-0.0084\,783$	$-0.0224\,278$	$+0.0013\,568$	$+0.0018\,108$	$-0.0002\,932$
N_r^{III}	$+0.0106\,500$	$-0.0063\,210$	$+0.0069\,546$	$+0.0244\,768$	$+0.0013\,291$	$+0.0016\,228$	$-0.0027\,275$
N_r^{IV}	$+0.0021\,280$	$-0.0013\,250$	$+0.0506\,672$	$-0.0375\,951$	$+0.0012\,586$	$+0.0011\,557$	$-0.0092\,499$
N_r^{V}	$-0.0000\,252$	$+0.0000\,095$	$-0.0000\,025$	$-0.0000\,001$	$+0.0011\,993$	$+0.0008\,794$	$+0.0063\,005$
N_r^{VI}	$-0.0000\,320$	$+0.0000\,134$	$-0.0000\,214$	$-0.0000\,006$	$+0.0011\,577$	$+0.0007\,180$	$-0.0156\,928$
N_r^{VII}	$+0.0000\,280$	$-0.0000\,070$	$+0.0000\,021$	$+0.0000\,000$	$-0.0011\,248$	$-0.0176\,872$	$+0.0006\,890$
N_r^{VIII}	$+0.0000\,008$	$-0.0000\,004$	$+0.0000\,002$	$+0.0000\,000$	$-0.0117\,882$	$+0.0019\,010$	$+0.0000\,772$

Man hat also z. B. für Jupiter:

$$\sin i_0^{\text{V}} \cos \Omega_0^{\text{V}} = -\, 0.0000\,252 \cos(-\ 5''.126\,112\, t + \ 21^{\circ}\ 6'\ 26''.8) +$$
$$+\, 0.0000\,095 \cos(-\ 6''.592\,128\, t + 132^{\circ}\,40'\ 57''.8) -$$
$$-\, 0.0000\,025 \cos(-17''.393\,390\, t + 292^{\circ}\,49'\ 53''.2) -$$
$$-\, 0.0000\,001 \cos(-18''.408\,914\, t + 251^{\circ}\,45'\ \ 8''.6) +$$
$$+\, 0.0011\,993 \cos(-\ 0''.661\,666\, t + \ 20^{\circ}\,31'\ 24''.6) +$$
$$+\, 0.0008\,794 \cos(-\ 2''.916\,082\, t + 133^{\circ}\,56'\ 10''.8) +$$
$$+\, 0.0063\,005 \cos(-25''.934\,567\, t + 306^{\circ}\,19'\ 21''.2).$$

Aus dieser Tafel zieht man folgende Schlüsse für die secularen Störungen der Neigungen und der Knotenlängen in Bezug auf die unveränderliche Ebene.

Für den Planeten *Mercur* hat man:

Maximum $\sin i_0^{\text{I}} = \Sigma \mid N_r^{\text{I}} \mid = 0.1595\,008$, entsprechend einer Neigung von $9^{\circ}\,10'\,41''$. Die Hälfte dieser Zahl ist 0.0797 504. Da sie kleiner als N_1^{I} ist, so folgt, dass N_1^{I} grösser als die Summe der übrigen Coefficienten ist; folglich hat der Knoten der Bahn von Mercur auf der unveränderlichen Ebene eine mittlere Bewegung, die gleich σ_1 oder $-5''.1261\,12$ ist. Der Minimalwerth der Neigung beträgt $4^{\circ}\,44'\,27''$.

Für *Venus* hat man:

Maximum $\sin i_0^{\text{II}} = 0.0570\,719$, einer Neigung von $3^{\circ}\,16'\,18''$ entsprechend. Da keiner von den Coefficienten N_r^{II} grösser als die Hälfte der obigen Zahl ist, so ist die Frage über die mittlere Bewegung des Knotens der Venusbahn unentschieden.

Für die *Erde* hat man:

Maximum $\sin i_0^{\text{III}} = 0.0540\,818$, einer Neigung von $3^{\circ}\,6'\,0''$ entsprechend. Da keiner von den Coefficienten N_r^{III} grösser als die Hälfte dieser Zahl ist, so muss die Frage über den Werth der mittleren Bewegung des Knotens der Erdbahn noch offen gelassen werden.

Für den Planeten *Mars* hat man:

Maximum $\sin i_0^{\text{IV}} = \Sigma \mid N_r^{\text{IV}} \mid = 0.1033\,795$, einer Neigung von $5^{\circ}\,56'\,2''$ entsprechend. Die Hälfte der obigen Zahl ist 0.0516 898. Da keiner der Coefficienten N_1^{IV}, N_2^{IV} u. s. w. grösser als diese

Zahl ist, so muss die Frage über den Werth der mittleren Bewegung des Knotens der Marsbahn noch offen gelassen werden.

Für den Planeten *Jupiter* hat man:

Maximum $\sin i_0^{\text{v}} = \Sigma \mid N_r^{\text{v}} \mid = 0.0084\,165$, einer Maximalneigung gegen die unveränderliche Ebene von $0^0 28' 56''$ entsprechend. Die Hälfte der obigen Zahl ist 0.0042 083. Da diese Zahl kleiner als N_7^{v} ist, so folgt, dass der Knoten der Bahn von Jupiter eine mittlere Bewegung gleich $-25''.934\,567$ besitzt. Der Minimalwerth der Neigung beträgt $0^0 14' 23''$.

Für den Planeten *Saturn* ist:

Maximum $\sin i_0^{\text{vi}} = \Sigma \mid N_r^{\text{vi}} \mid = 0.0176\,359$, einer Neigung von $1^0 0' 39''$ entsprechend. Die Hälfte der obigen Zahl ist 0.0088 180. Da diese Zahl kleiner als N_7^{vi} ist, so folgt, dass der Knoten der Bahn von Saturn eine mittlere Bewegung besitzt gleich σ_7, oder $25''.934\,567$. Der Minimalwerth der Neigung beträgt $0^0 47' 16''$.

Für den Planeten *Uranus* ist:

Maximum $\sin i_0^{\text{vii}} = \Sigma \mid N_r^{\text{vii}} \mid = 0.0195\,381$, einer Neigung von $1^0 7' 10''$ entsprechend. Die Hälfte der obigen Zahl ist 0.0097 690. Da diese Zahl kleiner als N_6^{vii} ist, so folgt, dass der Knoten der Bahn von Uranus eine mittlere Bewegung besitzt gleich σ_6, oder $-2''.916\,082$. Der Minimalwerth der Neigung beträgt $0^0 54' 25''$.

Für den Planeten *Neptun* ist:

Maximum $\sin i_0^{\text{viii}} = \Sigma \mid N_0^{\text{viii}} \mid = 0.0137\,678$, einer Neigung von $0^0 47' 21''$ entsprechend. Die Hälfte der obigen Zahl ist 0.0068 839. Da diese Zahl kleiner als N_5^{viii} ist, so folgt, dass der Knoten der Bahn von Neptun eine mittlere Bewegung besitzt gleich σ_5, oder $-0''.661\,666$. Der Minimalwerth der Neigung gegen die unveränderliche Ebene beträgt $0^0 33' 43''$.

Es erhellt aus dieser Zusammenstellung, dass *die mittleren Bewegungen der Knoten der Bahnen von Jupiter und Saturn auf der unveränderlichen Ebene genau gleich sind, indem beide sich rückwärts mit einer jährlichen Geschwindigkeit von 25''.934 567 bewegen.* Dies ist der zweite von STOCKWELL entdeckte Librationsfall im Planetensystem. Eine nähere Untersuchung auf Grund der Gleichungen § 6 (22) und (23) zeigt, dass *die mittleren Längen der aufsteigenden Knoten dieser beiden Bahnen auf der unveränderlichen Ebene*

genau um 180° von einander abweichen. In Folge der periodischen Schwankungen können sie sich höchstens auf 153° 15′ nähern, indem der Knoten der Jupitersbahn um 19° 38′, derjenige der Saturnsbahn um 7° 7′ um seinen mittleren Werth schwanken kann.

Der Knoten der Mercursbahn kann von seinem mittleren Werth um 18° 31′ abweichen. Die Knoten der Bahnen von Uranus und Neptun um bez. 6° 0′ und 9° 40′.

In Bezug auf die mittleren Bewegungen der Knoten und der Perihelien der Bahnen der Venus und der Erde und ebenfalls in Bezug auf die mittlere Bewegung des Knotens der Marsbahn lässt uns die Analysis von STOCKWELL noch in Ungewissheit. Wie ich schon mehrmals hervorgehoben habe, spricht Vieles dafür, dass solche mittleren Bewegungen auch für diese Planeten existiren, und zwar mit positiven Zeichen für die Perihelien, mit negativen für die Knoten.

Mit den Formeln von STOCKWELL sind folgende Werthe für die Excentricität und die Länge des Perihels der Erdbahn berechnet für die Zeit zwischen den Jahren −300000 und +100000.[1]

Siehe Tafel III S. 398.

Aus Tafel III geht hervor, dass die Länge des Perihels der Erdbahn zwar grossen Schwankungen unterliegt, unter Umständen sogar rückläufige Bewegung besitzen kann, dass aber in den betrachteten Jahren eine unverkennbare positive Bewegungsgeschwindigkeit des Perihels bemerkbar ist, welche zwischen den Jahren −300 000 und 0 jährlich ungefähr 5″.5 beträgt. In den nächsten 100 000 Jahren ist die Geschwindigkeit noch grösser. Hieraus kann man zwar keinen strengen Schluss ziehen über die Existenz einer mittleren Bewegung in mathematischer Bedeutung des Wortes. Vielleicht würde eine Anwendung der Analyse von CAVALLIN hier zu einer genaueren Kenntnis der Bewegung führen.

---

[1] Vergleiche: „Contributions to the astronomical theory of an ice-age“ vom Verf. Eine ähnliche Berechnung ist auch von GYLDÉN gemacht: l. c. S. 123.

Tafel III.

Excentricität und Länge des Perihels der Erdbahn.

Jahr	Excen-tricität	Länge des Per.	Jahr	Excen-tricität	Länge des Per.
−300 000	0.0373	−433°	+ 10 000	0.0115	+ 36°
−290 000	0.0337	−402	+ 20 000	0.0055	+ 92
−280 000	0.0262	−373	+ 30 000	0.0049	+206
−270 000	0.0163	−355	+ 40 000	0.0077	+225
−260 000	0.0093	−377	+ 50 000	0.0134	+297
−250 000	0.0161	−403	+ 60 000	0.0145	+325
−240 000	0.0271	−388	+ 70 000	0.0134	+345
−230 000	0.0370	−366	+ 80 000	0.0113	+354
−220 000	0.0437	−340	+ 90 000	0.0110	+349
−210 000	0.0471	−315	+100 000	0.0143	+348
−200 000	0.0470	−291			
−190 000	0.0442	−269			
−180 000	0.0395	−244			
−170 000	0.0334	−232			
−160 000	0.0283	−222			
−150 000	0.0254	−218			
−140 000	0.0266	−214			
−130 000	0.0307	−206			
−120 000	0.0356	−190			
−110 000	0.0394	−170			
−100 000	0.0408	−148			
− 90 000	0.0392	−124			
− 80 000	0.0343	− 99			
− 70 000	0.0269	− 76			
− 60 000	0.0181	− 59			
− 50 000	0.0110	− 61			
− 40 000	0.0110	− 83			
− 30 000	0.0157	− 79			
− 20 000	0.0192	− 59			
− 10 000	0.0195	− 31			
0	0.0168	0			

Es wird in Lehrbüchern öfters bemerkt, dass die Perihelien sämmtlicher Planeten sich vorwärts bewegen, mit Ausnahme der *Venus*, deren Perihel eine *rückläufige* Bewegung besitzen sollte. Es ist wohl zu bemerken, dass dies nur gilt, wenn man sich der in § 3 entwickelten Methode bedient, welche nur diejenige Perihelbewegung giebt, welche zu der Zeit der Osculation der Ausgangselemente vorhanden ist. Würde man nur 1000 Jahre rückwärts gehen, so würde man dagegen einen *positiven* Werth für die Perihelbewegung der Venusbahn gefunden haben. Zwar wird das Perihel dieser Bahn in den nächsten 30 000 Jahren sich rückwärts bewegen (überschlagsweise um ungefähr 60°), dann aber fängt die Perihellänge wieder an zu wachsen, und es ist das wahrscheinlichste, dass auch Venus eine positive Bewegung ihres Perihels besitzt.

Die secularen Störungen der grossen Planeten finden eine wichtige Anwendung in der sog. astronomischen Theorie der Eiszeit. Ich verweise in Bezug hierauf auf den schon citirten Aufsatz des Verfassers.

Stockwell hat in seiner Arbeit auch die numerischen Data gegeben, um den Einfluss kleiner Correctionen der Massen zu berechnen. Die hierfür erforderlichen Formeln sind indessen zu weitläufig, um hier Platz finden zu können.

§ 10. Ueber den Fall, dass die Fundamentalgleichung vielfache Wurzeln besitzt.

Die Bestimmung der secularen Störungen der grossen Planeten geschieht durch die Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten.

Wenn es sich um eine einzige abhängige Veränderliche handelt, die durch eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bestimmt ist, so weiss man, dass, wenn die Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln besitzt, in dem Integrale Glieder entstehen, welche mit der unabhängigen Veränderlichen multiplicirt sind und mit dieser über alle Grenzen wachsen. Ist dagegen ein *System von gleichzeitigen*

linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten gegeben, so entspricht nicht immer einer doppelten Wurzel der Fundamentalgleichung ein solches Glied, das der unabhängigen Veränderlichen proportional ist.[1] Ist im Besonderen die Determinante, welche, gleich Null gesetzt, die Fundamentalgleichung giebt, von *symmetrischer* Form, *so können niemals solche der unabhängigen Veränderlichen proportionale Glieder entstehen.*

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung der secularen Störungen der Excentricitäten und der Perihelien sind nach § 6 (3) von folgender Form

$$(1)\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo

$$(1^*)\qquad [F] = \tfrac{1}{2}\sum[i, j](\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j),$$

und die Coefficienten die Eigenschaft

$$(2)\qquad [j, i] = [i, j]$$

besitzen.

Durch eine orthogonale Substitution wurden nun die Grössen Ξ_i und Y_i durch die folgenden Formeln eingeführt

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_i &= \gamma_{i1}\Xi_1 + \ldots + \gamma_{in}\Xi_n \\ \eta_i &= \gamma_{i1}Y_1 + \ldots + \gamma_{in}Y_n \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Coefficienten γ_{ij} werden durch die gewöhnlichen Formeln, die für orthogonale Substitutionen gelten, § 6 (6) und (6*), bestimmt und ausserdem durch die Gleichungen § 6 (11).

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} ([1, 1] - s_\nu)\gamma_{1\nu} + \ldots + [1, n]\gamma_{n\nu} &= 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;& \\ [n, 1]\gamma_{1\nu} + \ldots + ([n, n] - s_\nu)\gamma_{n\nu} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] SEELIGER hat bewiesen, dass, wenn die Zahl der Planeten gleich *drei* ist, die Fundamentalgleichung niemals gleiche Wurzeln besitzen kann. Astr. Nachr. Nr. 2231.

wo s_ν durch die Fundamentalgleichung

$$(5)\qquad D = \begin{vmatrix} [1,1]-s, \ldots, [1,n] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [n,1], \ldots, [n,n]-s \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt wird.

Sind sämmtliche s_ν von einander verschieden, so erhält man n Systeme von der Form (4). Einer vielfachen Wurzel entspricht aber nur ein einziges solches System.

Nun ist offenbar:

$$(6)\qquad D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i,i]},$$

und also, wenn man diese Gleichung mit $\frac{\partial D}{\partial [r,r]}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial D}{\partial [r,r]} D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i,i]} \frac{\partial D}{\partial [r,r]},$$

wo r einen beliebigen Werth hat.

Da nun $D = 0$, so ist nach I § 1 (7)

$$\frac{\partial D}{\partial [i,i]} \times \frac{\partial D}{\partial [r,r]} = \frac{\partial D}{\partial [i,r]} \frac{\partial D}{\partial [r,i]}$$

$$= \left(\frac{\partial D}{\partial [i,r]}\right)^2,$$

der symmetrischen Form zufolge.

Und mithin

$$(7)\qquad \frac{\partial D}{\partial [r,r]} D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial D}{\partial [i,r]}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung kann man nun einen wichtigen Schluss ziehen. Ist nämlich s_ν eine zweifache Wurzel, so müssen die Gleichungen

$$D(s_\nu) = 0,$$

$$D'(s_\nu) = 0$$

gleichzeitig bestehen. Aus (7) folgt also unmittelbar, dass bei einer zweifachen Wurzel

$$\frac{\partial D}{\partial [i, r]} = 0$$

und zwar für alle Werthe von i und r. Es sind also *bei einer zweifachen Wurzel sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung gleich Null.*

Umgekehrt folgt, dass, *wenn die Wurzel eine einfache Wurzel ist, nicht sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden können.*

Aus (6) folgt nämlich, dass nicht sämmtliche Unterdeterminanten von der Form

$$\frac{\partial D}{\partial [i, i]}$$

gleichzeitig verschwinden können, wenn $D'(s) \neq 0$.

Aus der Formel

$$D''(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial [i, i] \, \partial [j, j]}$$

folgt ebenfalls, dass bei einer zweifachen Wurzel (bei welcher also $D''(s) \neq 0$) nicht sämmtliche Unterdeterminanten *zweiter* Ordnung verschwinden können u. s. w.

Sind sämmtliche Wurzeln einfach, so können also nicht alle Determinanten von der Form

$$\frac{\partial D}{\partial [i, i]}$$

verschwinden. Angenommen also, dass

$$\frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \neq 0,$$

so folgt aus (4) die folgende Lösung:

$$\frac{\gamma_{1\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, 2]}} = \ldots = \frac{\gamma_{n\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, n]}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]} \right)^2}}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Summe unter der Quadratwurzel kann man einfacher

schreiben. Es ist nämlich nach I § 1, weil $D = 0$ (und die Determinante symmetrisch ist),

$$\left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]}\right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \frac{\partial D}{\partial [i, i]}.$$

Mithin ist

$$\sum \left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]}\right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i, i]} = - \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} D'(s).$$

Das vollständige System von Werthen der Coefficienten γ_{ij}, wenn sämmtliche Wurzeln der Fundamentalgleichungen verschieden sind, ist also das folgende:

$$\frac{\gamma_{11}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{21}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{n1}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{- \frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]} D'(s_1)}}$$

$$\frac{\gamma_{12}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{22}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{n2}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{- \frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]} D'(s_2)}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\gamma_{1n}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2n}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [2, 1]}} = \dots = \frac{\gamma_{nn}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{- \frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]} D'(s_n)}}.$$

Wenn man sich der Formel I § 1 (7) bedient, so kann man eine interessante Form für die Quadrate der Coefficienten γ_{ij} erhalten. Mit Hilfe der betreffenden Formel bekommt man nämlich:

$$D'(s_\nu) \gamma_{i\nu}^2 = - \frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [i, i]}. \tag{8}$$

Wenn man die Zeichen der γ-Coefficienten kennt, giebt diese Formel eine bequeme Methode, diese Coefficienten zu berechnen unter Anwendung von *nur* symmetrischen Determinantenformen.

Aus (8) folgt, dass die Determinanten

$$\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial (i, i]} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gleichzeitig entweder positiv oder negativ sein müssen.

Allgemeiner ausgedrückt lautet dieser Satz so, dass, *wenn eine symmetrische Determinante mit reellen Elementen von der Form*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - s, \ldots, a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

gegeben ist und s_ν einen solchen Werth bezeichnet, für welchen diese Determinante verschwindet, so sind sämmtliche Unterdeterminanten von der ersten Ordnung, welche die Form

$$\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial a_{\iota\iota}}$$

besitzen, von demselben Zeichen.

Bezeichnet man mit s_1 eine zweifache Wurzel, so können nach dem obigen nicht sämmtliche Unterdeterminanten von der Form

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [i, i] \partial [j, j]}$$

verschwinden. Angenommen also, dass

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \neq 0,$$

so hat man nach I § 1 (12)

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma_{i1} = \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \gamma_{11} + \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \gamma_{21},$$

welche Formel auch für $i = 1$ und $i = 2$ ihre Gültigkeit behält.

Setzt man nun aus dieser Gleichung die Werthe von γ_{i1} in die Gleichung:

$$\sum \gamma_{i1}^2 = 1$$

ein, so wird

$$(10)\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\right)^2 = \gamma_{11}^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\right)^2 + \\ \qquad + \gamma_{21}^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}\right)^2 + \\ \qquad + 2\gamma_{11}\gamma_{21}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\,\dfrac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}.\end{cases}$$

Ist γ_{11} bestimmt, so erhält man aus dieser Gleichung den Werth von γ_{21}. *Einer zweifachen Wurzel entspricht also eine unendliche Schar von γ-Coefficienten. In diesem Umstande ist die Erklärung zu suchen, warum bei einer zweifachen Wurzel doch zwei willkürliche Integrationsconstanten auftreten müssen.* Weil nun sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, so kann man die Relation I § 1 (7) für die Determinanten zweiter Ordnung benutzen, und es ist also:

$$\left(\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\right)^2 = \left(\frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,i]}\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,i]}\cdot\frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[i,1]} = \frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,1]}\;\frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[i,i]}$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[2,2]\,\partial[i,i]},$$

und ebenfalls

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}\right)^2 = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\;\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[i,i]}.$$

Die letzte Summe in (10) lässt sich in folgender Weise transformieren: Es ist

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[2,i]} \text{ (nach I § 1 (6))}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]} = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[i,2]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,1]}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]} = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[2,i]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,1]}$$

$$= \frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[1,2]}}{\partial[2,i]}\cdot\frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[1,2]}}{\partial[i,1]} = \frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[1,2]}}{\partial[2,1]}\cdot\frac{\partial\dfrac{\partial D}{\partial[1,2]}}{\partial[i,i]} \text{ nach I § 1 (7)}$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[2,1]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,i]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\;\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,i]}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, i]\partial[2, 2]} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[2, i]} = -$$

$$- \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[2, 2]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 2]\partial[i, i]}.$$

Der Coefficient $\frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[2, 2]}$ ist nach der Voraussetzung von Null verschieden und man kann also überall durch ihn dividiren. Die Relation (10) lautet somit:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[2, 2]} = \gamma_{11}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial[2, 2]\partial[i, i]} + \\ \qquad + \gamma_{21}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[i, i]} - \\ \qquad - 2\gamma_{11}\gamma_{21} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 2]\partial[i, i]}. \end{cases}$$

Da nun

$$\frac{\partial D}{\partial s} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial[i, i]},$$

so kann man diese Formel auch in folgender Weise schreiben:

$$(12) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial[2, 2]} + \gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial[2, 2]\partial s} - \\ \qquad + \gamma_{21}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 1]\partial s} - \\ \qquad - 2\gamma_{11}\gamma_{21} \frac{\partial^2 D}{\partial[1, 2]\partial s}. \end{cases}$$

Aus (12) leitet man folgende *Normalformen* für die Coefficienten γ_{i1} ab:

$$(13) \quad \alpha) \begin{cases} \gamma_{21} = 0, \\ \gamma_{11}^2 = - \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1, 1]\partial[2, 2]} : \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[2, 2]\partial s}. \end{cases}$$

Die übrigen Coefficienten sind dann durch die Formel (9) gegeben, welche Formel nun lautet:

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\gamma_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\gamma_{11}.$$

β) Die Coefficienten in der zweiten Form werde ich von denjenigen in der ersten durch einen Strich oben unterscheiden:

$$(15) \qquad \begin{cases} \gamma'_{11} = 0, \\ \gamma'^2_{21} = -\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]} : \dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial s}. \end{cases}$$

Die übrigen γ' sind durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\gamma'_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}\gamma'_{21}.$$

Die Formen α und β, die ich kurzweg Normalformen nenne, bilden zusammen die vollständige Lösung des vorliegenden Problems, wenn es sich um eine zweifache Wurzel handelt. Die entsprechenden Integrale der Differentialgleichungen bilden zusammen mit den für die anderen Wurzeln geltenden eine Fundamentalgleichung von Integralen, wie ich gleich beweisen will.

Zuerst mache ich auf eine andere Form der Gleichungen (14) und (16) aufmerksam.

Man bekommt nämlich für die Quadrate der γ-Coefficienten folgende symmetrische Formen:

Fall α):

$$(17) \qquad \frac{\gamma_{i1}^2}{\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[2,2]\,\partial[i,i]}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[2,2]\,\partial s}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Für den Fall β):

$$(18) \qquad \frac{\gamma'^2_{i1}}{\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial[i,i]}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,1]\,\partial s}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Durch die orthogonale Substitution (3) wird die canonische Form der Differentialgleichungen beibehalten. Man hat somit statt (1)

$$\frac{d\,\Xi_i}{d\,t} = \frac{\partial\,[F]}{\partial\,Y_i}, \qquad \frac{d\,Y_i}{d\,t} = -\frac{\partial\,[F]}{\partial\,\Xi_i}, \tag{19}$$

d. h., da

$$2\,[F] = \sum s_i(\Xi_i^2 + Y_i^2),$$

$$\frac{d\,\Xi_i}{d\,t} = s_i\,Y_i, \qquad \frac{d\,Y_i}{d\,t} = -\,s_i\,\Xi_i \tag{20}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \Xi_i &= \quad M_i \cos(s_i\,t + \beta_i), \\ Y_i &= -\,M_i \sin(s_i\,t + \beta_i), \end{aligned}$$

wo M_i und β_i die Integrationsconstanten bedeuten.

Die Gleichungen (3) lauten nun:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \gamma_{11}\,M_1 \cos(s_1\,t + \beta_1) + \qquad * \qquad + \\ &\quad + \gamma_{13}\,M_3 \cos(s_3\,t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{1n}\,M_n \cos(s_n\,t + \beta_n) \\ \xi_2 &= \qquad * \qquad + \gamma_{22}\,M_2 \cos(s_1\,t + \beta_2) + \\ &\quad + \gamma_{23}\,M_3 \cos(s_3\,t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{2n}\,M_n \cos(s_n\,t + \beta_n) \\ \xi_3 &= \gamma_{31}\,M_1 \cos(s_1\,t + \beta_1) + \gamma_{32}\,M_2 \cos(s_1\,t + \beta_2) + \\ &\quad + \gamma_{33}\,M_3 \cos(s_3\,t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{3n}\,M_n \cos(s_n\,t + \beta_n) \\ &\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_n &= \gamma_{n1}\,M_1 \cos(s_1\,t + \beta_1) + \gamma_{n2}\,M_2 \cos(s_1\,t + \beta_2) + \\ &\quad + \gamma_{n3}\,M_3 \cos)s_3\,t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{nn}\,M \cos(s\;\;t + \beta), \end{aligned} \right. \tag{21}$$

wo nach (13) und (15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D}{\partial[2,\,2]\,\partial s}\gamma_{11}^2 &= -\,\frac{\partial^2 D}{\partial\,[1,\;1]\;\partial[2,\;2]}, \\ \frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial s}\gamma_{21}^2 &= -\,\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\;1]\,\partial[2,\;2]}. \end{aligned}$$

Es seien nun

$$\begin{matrix} g_{11}, & g_{12}, & \ldots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \ldots, & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \ldots, & g_{nn} \end{matrix}$$

irgend ein anderes System von Coefficienten, welche die Gleichungen (4) befriedigen, so dass

$$(22)\qquad \begin{cases} (\xi_1) = \Sigma g_{1i}\,\Xi_i, \\ (\xi_2) = \Sigma g_{2i}\,\Xi_i \end{cases}$$

auch eine Lösung der Differentialgleichungen ist. Dann hat man in Folge der Relationen (14), (16) und (9):

$$(23)\qquad \begin{cases} g_{i1} = \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{11} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{21}, \\ g_{i2} = \frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{12} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{22}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (22) können also in folgender Form geschrieben werden:

$$(\xi_1) = g_{11}(M_1)\cos(s_1 t + (\beta_1)) + g_{12}(M_2)\cos(s_1 t + (\beta_2)) + \sum_{j=3}^{n} g_{1j}\,\Xi_j,$$

$$(\xi_2) = g_{21}(M_1)\cos(s_1 t + (\beta_1)) + g_{22}(M_2)\cos(s_1 t + (\beta_2)) + \sum g_{2j}\,\Xi_j,$$

. . . .

$$(\xi_i) = \left(\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{11} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{21}\right)(M_1)\cos(s_1 t + (\beta_1)) +$$

$$+ \left(\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{12} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{22}\right)(M_2)\cos(s_1 t + (\beta_2)) + \sum_{j=3}^{n} g_{ij}\,\Xi_j.$$

Wenn nun die Integrationsconstanten M_1, M_2, β_1 und β_2 in (21) so bestimmt werden, dass

$$g_{11}(M_1)\cos(s_1 t + (\beta_1)) + g_{12}(M_2)\cos(s_1 t + (\beta_2)) = \gamma_{11} M_1 \cos(s_1 t + \beta_1),$$

$$g_{21}(M_1)\cos(s_1 t + (\beta_1)) + g_{22}(M_2)\cos(s_1 t + (\beta_2)) = \gamma_{22} M_2 \cos(s_1 t + \beta_2),$$

was immer möglich ist, so bekommt man offenbar

$$(\xi_i) = \xi_i,$$

und hieraus folgt, dass die Integrale (21) ein Fundamentalsystem von Integralen bilden.

Die obigen Auseinandersetzungen beruhen wesentlich darauf, dass die Determinante D eine symmetrische Form bekommt. Wenn eine von den Massen verschwindend ist, so ist dies nicht mehr der Fall, und es ist deswegen möglich, dass bei den *kleinen* Planeten, die so gelegen sind, dass mehrfache Wurzeln von der Gleichung (5) auftreten, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Functionen zum Vorschein kommen kann.[1]

Ich verweise in Bezug hierauf auf einen Aufsatz von A. Idman (Meddelanden från Lunds observatorium Nr. 14). Siehe auch unten § 12.

§ 11. Die secularen Störungen der kleinen Planeten.

Unter dem Namen „kleiner Planet" versteht man in der Mechanik einen Körper, dessen Masse gleich Null gesetzt werden kann. Ein solcher Körper wird in seiner Bewegung von den „grossen Planeten" beeinflusst, übt aber keine Einwirkung auf die Bewegung der letzteren, noch auf die Bewegung der anderen „kleinen Planeten" in dem System aus.

Will man sich der canonischen Jacobi'schen Coordinaten bedienen, so kann man offenbar nach Belieben den Anfangspunkt der Coordinaten des kleinen Planeten entweder in den Centralkörper (die Sonne) legen oder in den Schwerpunkt eines Systems, bestehend aus der Sonne und einer beliebigen Zahl der grossen Planeten. Man kann also auch als Anfangspunkt der Coordinaten den Schwerpunkt des ganzen Systems wählen.

Den Elementen von Poincaré, welche wir für die Untersuchung der secularen Störungen eines kleinen Planeten anwenden wollen, geben wir hier eine etwas veränderte Bedeutung, indem wir den Factor β, welcher der verschwindend kleinen Masse des Planeten proportional ist, wegschaffen. Wir setzen also

[1] Die obige Auseinandersetzung über den Fall, dass die Fundamentalgleichung zwei gleiche Wurzeln besitzt, ist vom Verf. in „Meddelanden från Lunds Observatorium" Nr. 15 gegeben.

$$
(1)\quad \begin{cases}
\varLambda = \sqrt{a} & , \\
\lambda = l + \pi = \text{mittlere Länge} & , \\
\xi = \sqrt{2\varLambda\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)} \cos\pi & , \\
\eta = -\sqrt{2\varLambda\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)} \sin\pi & , \\
p = \sqrt{2\varLambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} \cos\Omega, \\
q = -\sqrt{2\varLambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)} \sin\Omega,
\end{cases}
$$

und erhalten dann folgende Differentialgleichungen

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\varLambda}{dt} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}, & \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial\varLambda}, \\
\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial\eta}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial\xi}, \\
\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial q}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial F}{\partial p}.
\end{cases}
$$

Handelt es sich im Besonderen um die secularen Störungen, so können wir setzen:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\varLambda}{dt} = 0 \quad , & \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial\varLambda}, \\
\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial\eta}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial\xi}, \\
\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial q}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial p},
\end{cases}
$$

wo nun genähert, wenn M die Masse der Sonne bezeichnet,

$$
(3^*)\quad \begin{cases}
[F] = \dfrac{\beta}{\mu\varLambda^2} + \\
\quad + \dfrac{1}{\sqrt{M}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k\, m_i \Big\{ \tfrac{1}{2} A_0(a, a_i) + \tfrac{1}{8} B_1(a, a_i)\left(\dfrac{\xi^2 + \eta^2}{\varLambda} + \dfrac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\varLambda_i}\right) \\
\qquad - \tfrac{1}{4} B_2(a, a_i)\dfrac{\xi\xi_i + \eta\eta_i}{\sqrt{\varLambda\varLambda_i}} \\
\qquad - \tfrac{1}{8} B_1(a, a_i)\left(\dfrac{p^2 + q^2}{\varLambda} + \dfrac{p_i^2 + q_i^2}{\varLambda_i}\right) \\
\qquad - \tfrac{1}{4} B_1(a, a_i)\dfrac{p p_i + q q_i}{\sqrt{\varLambda\varLambda_i}} \Big\},
\end{cases}
$$

wo die Massen der Planeten mit $m_1, \ldots, m_n$ bezeichnet sind. Die Werthe von β und μ hängen von der Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten ab.

Setzt man

$$(4)\quad \begin{cases} (0, i)' = \dfrac{k\, m_i}{\sqrt{M}\, 4\, \varDelta} \qquad B_1(a, a_i) \\ [0, i]' = \dfrac{k\, m_i}{\sqrt{M}\, 4 \sqrt{\varDelta\, \varDelta_i}} B_2(a, a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ |0, i|' = \dfrac{k\, m_i}{\sqrt{M}\, 4 \sqrt{\varDelta\, \varDelta_i}} B_1(a, a_i) \end{cases}$$

so werden die Differentialgleichungen für ξ, η, p und q

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \quad \eta \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i)' - \sum\limits_{i=1}^{n} [0, i]' \eta_i, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\xi \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i)' + \sum\limits_{i=1}^{n} [0, i]' \xi_i, \end{cases}$$

und

$$(5^*)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -q \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i)' + \sum\limits_{i=1}^{n} |0, i|' q_i, \\ \dfrac{dq}{dt} = \quad p \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i)' - \sum\limits_{i=1}^{n} |0, i|' p_i. \end{cases}$$

Die Grössen $\varDelta_i$ haben hier die Bedeutung

$$\varDelta_i = \sqrt{a_i},$$

und weiter ist

$$\xi_i = \sqrt{2\, \varDelta_i \left(1 - \sqrt{1 - e_i^2}\right)} \cos \pi_i, \quad \text{u. s. w.}$$

Die obigen Gleichungen können in etwas einfacherer Form geschrieben werden, wenn man auf beiden Seiten mit $\sqrt{\varDelta}$ dividirt.

Führen wir nämlich die Bezeichnungen ein

$$
(6)\quad \begin{cases}
[\xi_r] = \dfrac{1}{\sqrt{A_r}}\xi_r = \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-e_r^2}\right)}\cos\pi_r = e_r\cos\pi_r \quad (\text{genäh.}),\\
[\eta_r] = \dfrac{1}{\sqrt{A_r}}\eta_r = -\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-e_r^2}\right)}\sin\pi_r = -e_r\sin\pi_r \quad (\;\text{"}\;),\\
[p_r] = \dfrac{1}{\sqrt{A_r}}p_r = \sqrt{\sqrt{1-e_r^2}(1-\cos i_r)}\cos\Omega_r = \sin i_r\cos\Omega_r \quad (\;\text{"}\;),\\
[q_r] = \dfrac{1}{\sqrt{A_r}}q_r = -\sqrt{\sqrt{1-e_r^2}(1-\cos i_r)}\sin\Omega_r = -\sin i_r\sin\Omega_r \quad (\;\text{"}\;),\\
\qquad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)
\end{cases}
$$

wo $A_0 = A$, $\xi_0 = \xi$ etc., und weiter

$$
(6^*)\quad \begin{cases}
(0,\ i) = \dfrac{k m_i}{4\sqrt{MA}} B_1(a,\ a_i),\\
[0,\ i] = \dfrac{k m_i}{4\sqrt{MA}} B_2(a,\ a_i),
\end{cases} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)
$$

so bekommt man offenbar statt (5) und (5*)

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{d[\xi]}{dt} = [\eta]\sum_{i=1}^{n}(0,\ i) - \sum_{i=1}^{n}[0,\ i][\eta_i],\\
\dfrac{d[\eta]}{dt} = -[\xi]\sum_{i=1}^{n}(0,\ i) + \sum[0,\ i][\xi_i]
\end{cases}
$$

und

$$
(7^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{d[p]}{dt} = -[q]\sum_{i=1}^{n}(0,\ i) + \sum_{i=1}^{n}(0,\ i)[q_i],\\
\dfrac{d[q]}{dt} = [p]\sum_{i=0}^{n}(0,\ i) - \sum_{i=1}^{n}(0,\ i)[p_i],
\end{cases}
$$

welche Gleichungen wir der Berechnung der secularen Störungen zu Grunde legen wollen.

Man kann hier, ebenso wie bei der Berechnung der secularen Störungen der grossen Planeten, zwei Wege einschlagen. *Entweder* —

indem man sich auf den Standpunkt der eigentlichen Störungstheorie stellt — in der rechten Seite von (7) und (7*) die gegenwärtigen (= zur Zeit der Osculation geltenden) Werthe der Elemente einsetzen, wodurch die rechten Seiten constante Werthe annehmen, welche den Werth der secularen Veränderungen der Elemente direct geben, *oder* man kann die Gleichungen genau integriren. Beide Methoden werden auch bei den kleinen Planeten mit Vortheil benutzt. Da indessen die Perioden der secularen Störungen in diesem Falle viel kürzer sind, als es bei den grossen Planeten der Fall war, so geben die nach der ersteren Methode erhaltenen Störungsausdrücke nur für eine verhältnissmässig kurze Zeit eine wirkliche Annäherung an die wahren Werthe der Störungen, und die trigonometrische Form der Störungen kann aus diesem Grunde auch vom praktischen Gesichtspunkte hier vortheilhaft sein. Wir wollen uns deswegen mit der letzteren Methode allein beschäftigen.

Wir wollen zuerst die Coefficienten $(0, i)$ und $[0, i]$ in einer für die numerische Rechnung mehr geeigneten Form schreiben. Es ist nämlich

$$k\sqrt{M} = n A^3,$$

wo n die mittlere Bewegung des kleinen Planeten ist. Folglich hat man

$$(8) \quad \begin{cases} (0, i) = \frac{1}{4}\frac{m_i}{M} n a B_1(a, a_i), \\ [0, i] = \frac{1}{4}\frac{m_i}{M} n a B_2(a, a_i), \end{cases}$$

wo wir beachten, dass aB_1 und aB_2 nur von dem *Verhältniss* zwischen a und a_i abhängen.

Wir haben früher bequeme Formeln zur Berechnung dieser Grössen abgeleitet § 3 (9).

Aus der Theorie der secularen Störungen der grossen Planeten sind die Ausdrücke für ξ_i, η_i, p_i und q_i bekannt. Mit den Bezeichnungen des neunten Paragraphen war nämlich

$$(9)\quad \begin{cases} [\xi_i] = M_1^{(i)}\cos(s_1 t + \beta_1) + \ldots + M_n^{(i)}\cos(s_n t + \beta_n), \\ [\eta_i] = -M_1^{(i)}\sin(s_1 t + \beta_1) - \ldots - M_n^{(i)}\sin(s_n t + \beta_n), \end{cases}$$

und

$$(9^*)\quad \begin{cases} [p_i] = N_1^{(i)}\cos(\sigma_1 t + \delta_1) + \ldots + N_n^{(i)}\cos(\sigma_n t + \delta_n), \\ [q_i] = -N_1^{(i)}\sin(\sigma_1 t + \delta_1) - \ldots - N_n^{(i)}\sin(\sigma_n t + \delta_n). \end{cases}$$

Die Grössen $s_1, \ldots, s_n$ waren sämmtlich positiv, die Grössen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sämmtlich negativ. Die Werthe der Coefficienten M und N in dem Planetensystem sind im genannten Paragraphen angegeben und ebenso die Werthe von s_i, σ_i, β_i und δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Setzt man die Werthe (9) und (9*) in (7) und (7*) ein, so nehmen diese Gleichungen folgende Form an:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d[\xi]}{dt} = b[\eta] + \sum\limits_{r=1}^{n} E_r \sin(s_r t + \beta_r), \\ \dfrac{d[\eta]}{dt} = -b[\xi] + \sum\limits_{r=1}^{n} E_r \cos(s_r t + \beta_r), \end{cases}$$

und

$$(10^*)\quad \begin{cases} \dfrac{d[p]}{dt} = -b[q] - \sum\limits_{r=1}^{n} F_r \sin(\sigma_r t + \beta_r), \\ \dfrac{d[q]}{dt} = b[p] - \sum\limits_{r=1}^{n} F_r \cos(\sigma_r t + \beta_r), \end{cases}$$

wo

$$(11)\quad \begin{cases} b = \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i), \\ E_r = \sum\limits_{i=1}^{n} [0, i]\, M_r^{(i)}, \\ F_r = \sum\limits_{i=1}^{n} (0, i)\; N_r^{(i)}. \end{cases}$$

Die Integrale dieser Gleichungen lauten:

$$(12)\quad \begin{cases} [\xi] = A\cos(\;\, bt + B) + \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{E_r}{b - s_r}\cos(s_r t + \beta_r), \\ -[\eta] = A\sin(\;\, bt + B) + \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{E_r}{b - s_r}\sin(s_r t + \beta_r), \end{cases}$$

und

$$(12^*)\quad \begin{cases} [p] = C\cos(-bt + D) + \sum_{r=1}^{n} \frac{F_r}{b+\sigma_r}\cos(\sigma_r t + \delta_r), \\ -[q] = C\sin(-bt + D) + \sum_{r=1}^{n} \frac{F_r}{b+\sigma_r}\sin(\sigma_r t + \delta_r). \end{cases}$$

Hier bedeuten A, B, C, D die Integrationsconstanten.

Die Grössen $[0, i]$ und $(0, i)$ hängen nur vom Abstand des Planeten von der Sonne ab. Nach (11) ist dies auch mit den Grössen b, E_r und F_r der Fall. Die Gleichungen (12) zeigen nun, dass die Coefficienten in den Integralen, wenn wir von dem ersten Glied absehen, für jeden Abstand von der Sonne einen bestimmten Werth haben. Wir wollen ihr Verhalten bei verschiedenen Werthen dieses Abstandes näher untersuchen.

Die Coefficienten $B_i(a, a_i)$ sind nach § 2 (8) durch die folgende Formel definirt:

$$\frac{\pi}{2} B_i = \int_0^\pi \frac{a\,a_i\,d\varphi\cos i\varphi}{[a^2 + a_i^2 - 2\,a\,a_i\cos\varphi]^{3/2}}.$$

Nach dieser Definition haben dieselben für jeden Werth von a mit Ausnahme von $a = a_i$, einen endlichen und positiven Werth. *Für $a = a_i$ ist der Werth dieser Coefficienten unendlich gross.*

Hieraus folgt, dass auch b, E_r und F_r für jeden Werth für a endlich sind mit Ausnahme der Werthe $a = a_1$, $a = a_2$, ..., $a = a_n$, für welche diese Grössen unendlich gross werden. Wenn man also die a-Werthe auf einer Linie als Abscisse aufträgt, und die entsprechenden Werthe einer der Grössen b, E_r oder F_r als Ordinaten senkrecht hierzu, so werden die so entstandenen Curven sich den Linien $a = a_1$, $a = a_2$, ..., $a = a_n$ auf beiden Seiten asymptotisch nähern.

Die Coefficienten

$$\frac{E_r}{b - s_r} \quad\text{und}\quad \frac{F_r}{b + \sigma_r}$$

erhalten indessen für diese Abstände endliche Werthe. Die Grössen b, E_r und F_r werden nämlich *gleichzeitig* unendlich gross, und man erhält:

$$\lim_{a=a_i} \frac{E_r}{b - s_r} = M_r^{(i)},$$

$$\lim_{a=a_i} \frac{F_r}{b + \sigma_r} = N_r^{(i)},$$

so dass, indem man sich einem Abstande nähert, in welchem ein *grosser* Planet — m_i — vorhanden ist, die Ausdrücke für die secularen Elemente sich den folgenden Werthen asymptotisch nähern:

$$\begin{aligned}
[\xi] &= A\cos(bt + B) + \sum_{r=1}^{n} M_r^{(i)}\cos(s_r t + \beta_r),\\
-[\eta] &= A\sin(bt + B) + \sum M_r^{(i)}\sin(s_r t + \beta_r),\\
[p] &= C\cos(-bt + D) + \sum N_r^{(i)}\cos(\sigma_r t + \delta_r),\\
-[q] &= C\sin(-bt + D) + \sum N_r^{(i)}\sin(\sigma_r t + \delta_r),
\end{aligned}$$

oder, wenn man sich der Ausdrücke (9) und (9*) erinnert,

$$\begin{aligned}
[\xi] &= A\cos(bt + B) + \xi_i,\\
-[\eta] &= A\sin(bt + B) - \eta_i,\\
[p] &= C\cos(-bt + D) + p_i,\\
-[q] &= C\sin(-bt + D) - q_i;
\end{aligned}$$

man würde also dann für den betreffenden kleinen Planeten dieselben Ausdrücke für die secularen Elemente, wie für den grossen Planeten m_i erhalten bis auf das willkürliche Glied $A\cos(bt + B)$, $A\sin(bt + B)$ u. s. w.

Obgleich also die Coefficienten in den analytischen Ausdrücken für die secularen Störungen der kleinen Planeten alle endlich sind für solche Abstände, die mit den Abständen der grossen Planeten zusammenfallen, so folgt daraus nicht, dass die Bahnen der kleinen Planeten für solche Werthe als *stabil* zu bezeichnen wären.

Die Grösse b in dem willkürlichen Glied, die, wie unten gezeigt wird, durchschnittlich mit dem Werth der mittleren Bewegung des Perihels und der mittleren rückläufigen Bewegung des Knotens

zusammenfällt, wird nämlich, wie wir gesehen haben, für die genannten Abstände unendlich gross, und *die mittlere Bewegung des Perihels und diejenige des Knotens wächst also über alle Grenzen*, wenn man sich diesen Abständen nähert. In dieser Weise hat man sich die Zerstörung solcher Planetenbahnen zu denken, bei denen durch die schnelle Bewegung des Perihels und des Knotens bald ein Zusammenstoss mit dem grossen Planeten, oder wenigstens eine so grosse Annäherung an denselben stattfinden muss, dass die Bahn des kleinen Planeten eine völlige Umgestaltung erfährt. Selbstverständlich müssen die *periodischen* Störungen dabei auch eine grosse Rolle — oder gar die Hauptrolle — spielen.

Die Coefficienten in den Ausdrücken für die secularen Störungen werden unendlich gross, wenn der Abstand von dem Centralkörper einen solchen Werth hat, dass b gleich einer von den Grössen $s_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ oder $-\sigma_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ wird. Wir wollen diesen Fall in dem folgenden Paragraphen näher untersuchen.

Die Grössen $[0, i]$ und $(0, i)$ und b sind von Norén und Raab tabulirt worden.[1] Aus ihren Tafeln entnehme ich die folgende Zusammenstellung der Werthe von b für unseres Planetensystem.

Tafel IV.

a	b	a	b	a	b
1.60	32″.681	2.60	49″.319	3.60	158″.086
1.70	22 .752	2.70	54 .744	3.70	182 .125
1.80	23 .094	2.80	60 .864	3.80	211 .477
1.90	24 .816	2.90	67 .797	3.90	247 .832
2.00	27 .114	3.00	75 .692	4.00	293 .620
2.10	29 .814	3.10	84 .734	4.10	352 .416
2.20	32 .882	3.20	95 .160	4.20	429 .665
2.30	36. 327	3.30	107 .263	4.30	533 .994
2.40	40. 180	3.40	121 .425		
2.50	44. 490	3.50	138 .146		

[1] Gustaf Norén und Sigfrid Raab: „Hülfstafeln zur Berechnung der secularen Störungen der kleinen Planeten". Meddelanden från Lunds Observatorium, Ser. II, Nr. 2.

Setzen wir in (12) und (12*) die Werthe

$$[\xi] = \quad e\cos\pi\,, \qquad [p] = \quad \sin i \cos\Omega\,,$$
$$[\eta] = -e\sin\pi\,, \qquad [q] = -\sin i\sin\Omega$$

ein, und benutzen die Bezeichnungen

$$\frac{E_r}{b - s_r} = G_r\,,$$
$$\frac{F_r}{b + \sigma_r} = H_r\,,$$

so ist

$$(13)\quad \begin{cases} e\cos\pi = A\cos(\quad bt + B) + \sum G_r\cos(s_r t + \beta_r)\,, \\ e\sin\pi = A\sin(\quad bt + B) + \sum G_r\sin(s_r t + \beta_r)\,, \end{cases}$$

und

$$(13^*)\quad \begin{cases} \sin i\cos\Omega = C\cos(-bt + D) + \sum H_r\cos(\sigma_r t + \delta_r)\,, \\ \sin i\sin\Omega = C\sin(-bt + D) + \sum H_r\sin(\sigma_r t + \delta_r)\,. \end{cases}$$

Die Integrationsconstanten A, B, C, D werden in der Weise bestimmt, dass man in den obigen Gleichungen einen bestimmten Werth für die Zeit einsetzt. Setzt man $t = 0$, so erhält man die Gleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} A\cos B = \quad e_0\cos\pi_0 \quad - \sum G_r\cos\beta_r\,, \\ A\sin B = \quad e_0\sin\pi_0 \quad - \sum G_r\sin\beta_r\,, \end{cases}$$

und ebenfalls

$$(14^*)\quad \begin{cases} C\cos D = \sin i_0\cos\Omega_0 - \sum H_r\cos\delta_r\,, \\ C\sin D = \sin i_0\sin\Omega_0 - \sum H_r\sin\delta_r\,, \end{cases}$$

wo e_0, π_0, i_0 und Ω_0 die Werthe der Elemente des kleinen Planeten für $t = 0$ bezeichnen.

Nun sind, wie man leicht findet, die Grössen G_r und H_r *im Allgemeinen* von derselben Grössenordnung wie die Excentricitäten und Neigungen der *grossen* Planeten. Aus (14) und (14*) folgt dann,

dass A und C von der Grössenordnung der Excentricitäten und der Neigungen der *kleinen* Planeten sind. Da durchschnittlich diese letzteren verhältnissmässig grösser als die entsprechenden Grössen für die grossen Planeten sind, so folgt also, dass A und C für die meisten Planeten grösser als G_r und H_r sind, und eine nähere Untersuchung zeigt, dass für die grosse Mehrzahl der kleinen Planeten die Ungleichheiten

$$|A| > \sum |G_r|, \tag{15}$$

$$|C| > \sum |H_r| \tag{15*}$$

bestehen.

Es lässt sich nun hieraus eine interessante Folgerung ziehen. Sind nämlich die Ungleichheiten (15) und (15*) erfüllt, so weiss man nach der Analyse des § 6, dass π die mittlere Bewegung b, und Ω die mittlere Bewegung $-b$ besitzen muss. *Die mittlere Bewegung des Perihels eines kleinen Planeten und die mittlere Bewegung des Knotens auf der unveränderlichen Ebene sind also der Grösse nach gleich b. Die mittlere Bewegung des Perihels ist positiv, diejenige des Knotens dagegen rückläufig.*

Da man nach (14) und (14*) die Coefficienten A und C positiv wählen kann, so gelten die Gleichungen

$$\pi = \quad b\,t + B + P_1,$$

$$\Omega = -b\,t + D + P_2,$$

wo P_1 und P_2 periodische Grössen bezeichnen, die beide numerisch kleiner als 90° sind.

Sehen wir von dem Planeten *Eros* ab, der innerhalb der Marsbahn liegt, so liegen die bekannten Asteroiden in einem Abstand zwischen 1.95 und 4.30 von der Sonne. Der innerste Planet ist (434) *Hungaria*, dessen halbe grosse Achse a gleich 1.946 ist, und der äusserste ist (279) *Thule* mit $a = 4.263$. Nach der Tafel findet man somit, dass b zwischen 25″.82 und 488″.26 liegt. Der durchschnittliche Werth der mittleren Bewegung des Perihels und des

Knotens der kleinen Planeten ist also bedeutend grösser als die entsprechenden Grössen für die grossen Planeten. Wie aus Tafel IV ersichtlich ist, besitzt b zwischen Jupiter und Mars einen Minimalwerth, der für $a = 1.73$ eintritt und gleich $22''.55$ ist.

Anders verhält es sich indessen für diejenigen Planeten, für welche die Ungleichheit (15) oder (15*) nicht stattfindet. Ist im Besonderen eine von den Grössen G_r — sagen wir G_7, welche für den grössten Theil des Gebietes den grössten Coefficienten bezeichnet — seinem numerischen Werth nach grösser als die Summe der absoluten Beträge der übrigen, inclusive A, so dass also

$$|G_7| > A + \sum |G_r|, \tag{16}$$

so muss nach § 6 das Perihel eine mittlere Bewegung gleich s_7 besitzen. Es findet dann, wie man sagt, *Libration* statt zwischen dem kleinen Planeten und Jupiter. Man hat dann

$$\pi = s_7 t + \beta_7 + P_3 \tag{16*}$$

oder

$$\pi = s_7 t + \beta_7 + 180^\circ + P_4, \tag{16**}$$

wo P_3 und P_4 periodische Grössen bezeichnen, die kleiner als 90° sind, und zwar gilt die Formel (16*), wenn G_7 *positiv* ist, die Formel (16**) dagegen, wenn G_7 einen *negativen* Werth hat. Nach § 9 wissen wir, dass für Jupiter die Gleichung

$$\pi^{IV} = s_7 t + \beta_7 + P_5$$

stattfindet,[1] und folglich wird die mittlere Lage des Perihels des kleinen Planeten für alle Zeiten mit der mittleren Lage des *Perihels* Jupiters zusammenfallen, wenn G_7 positiv ist, dagegen würde die mittlere Lage des Perihels des kleinen Planeten mit der mittleren Lage des *Aphels* Jupiters übereinstimmen, wenn G_7 einen negativen Werth haben sollte. Für die bis jetzt bekannten kleinen Planeten — Eros vielleicht ausgeschlossen — ist G_7 positiv.

[1] Ich werde mit P_i ($i = 1, 2, \ldots$) eine periodische Function verstehen, die numerisch kleiner als 90° bleibt.

Für kleine Planeten, die hinreichend nahe an Mars liegen, kann unter Umständen auch eine Libration mit *Saturn* stattfinden, ein bemerkenswerther Fall in der Mechanik des Himmels.

Für die mittlere Bewegung des *Knotens* gelten ähnliche Betrachtungen. Wie schon aus § 9 bekannt ist, findet eine Libration zwischen Jupiter und Saturn in der Knotenlänge statt; es können auch kleine Planeten vorhanden sein, welche an dieser Librationsbewegung theilnehmen. Wir wollen diesen Fall im nächsten Paragraphen untersuchen.

Durch eine Analysis, die ich hier übergehe,[1] habe ich gefunden, dass eine Libration im Perihel (mit Jupiter) bei folgenden Planeten zu vermuthen ist, nämlich:

40 Harmonia
117 Lomia
147 Protogeneia
189 Phthia
196 Philomela
205 Martha
215 Oenone
286 Iclea
292 Ludovica
300 Geraldina
338 Budrosa
357 [1893 J]

Möglicherweise kann eine Libration noch bei einigen anderen kleinen Planeten stattfinden. Um zu untersuchen, wie es sich mit den obigen Planeten verhält, hat man die Werthe der Coefficienten $G_1, \ldots, G_n$ und der Integrationsconstanten A und B zu berechnen. Man kann sich zu dem Zweck der folgenden Tafel von Newcomb[2] bedienen, die zwar mit Leverrier's Werthen für die secularen Störungen der grossen Planeten berechnet ist, und ausserdem nur zwischen $a = 2.2$ und 3.2 die Coefficienten giebt, jedoch hier als hinreichend genau zu betrachten ist.

[1] Meddelanden från Lunds Observatorium, Nr. 12.

[2] „On the secular variations of the orbits of the Asteroids". Memoirs of the American Acad., New Series, Vol. V.

Tafel V.

a	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
2.2	+0.000 079	−0.000 162	+0.000 352	−0.000 597	+0.000 049	+0.001 679	+0.024 174	+0.023 044
2.3	+0.000 052	−0.000 109	+0.000 209	−0.000 348	+0.000 051	+0.001 741	+0.024 960	+0.019 984
2.4	+0.000 033	−0.000 073	+0.000 131	−0.000 208	+0.000 053	+0.001 802	+0.025 743	+0.018 043
2.5	+0.000 020	−0.000 050	+0.000 085	−0.000 126	+0.000 055	+0.001 862	+0.026 523	+0.016 735
2.6	+0.000 011	−0.000 034	+0.000 056	−0.000 081	+0.000 057	+0.001 922	+0.027 299	+0.015 817
2.7	+0.000 004	−0.000 022	+0.000 038	−0.000 054	+0.000 059	+0.001 980	+0.028 070	+0.015 162
2.8	−0.000 001	−0.000 014	+0.000 026	−0.000 037	+0.000 061	+0.002 038	+0.028 837	+0.014 688
2.9	−0.000 004	−0.000 008	+0.000 018	−0.000 025	+0.000 063	+0.002 096	+0.029 598	+0.014 346
3.0	−0.000 007	−0.000 004	+0.000 012	−0.000 017	+0.000 065	+0.002 153	+0.030 355	+0.014 104
3.1	−0.000 009	±0.000 000	+0.000 008	−0.000 012	+0.000 067	+0.002 209	+0.031 107	+0.013 935
3.2	−0.000 011	+0.000 002	+0.000 006	−0.000 008	+0.000 069	+0.002 265	+0.031 854	+0.013 831

Wie man findet, sind die Coefficienten G_6, G_7, G_8 die grössten. Wenn die übrigen vernachlässigt werden, erhält man für die genannten Planeten folgende Werthe für G_6, G_7, G_8. Aus (14) sind ausserdem die Integrationsconstanten A und B berechnet. (Siehe Tabelle S. 425.)

Man findet, dass für alle diese Planeten der Coefficient G_7 grösser als A ist und auch grösser als die anderen Coefficienten. Für die drei Planetoiden (147) Protogeneia, (189) Phthia und (205) Martha ist G_7 grösser als die *Summe* der anderen Coefficienten. Diese drei Planeten besitzen also *Libration* in der Perihellänge, d. h. *die Länge des Perihels dieser drei Planeten weicht niemals mehr als 90° von der Länge des Perihels Jupiters ab.* Die mittlere Bewegung des Perihels wird hier gleich s_7, oder 3″.717, während für andere Planeten, die sich in demselben Abstand von der Sonne befinden, die mittlere Bewegung gleich b und also bedeutend grösser ist.

Was die anderen Planeten betrifft, welche in der obigen Zusammenstellung vorkommen, so muss der Werth ihrer mittleren Bewegung des Perihels — wenn überhaupt eine existirt — vorläufig als unbekannt betrachtet werden. Derselbe fällt jedenfalls nicht mit b zusammen.

§ 12. Die secularen Störungen der kleinen Planeten. Fortsetzung.

Wir haben oben darauf aufmerksam gemacht, dass der Coefficient G_r unendlich wird, wenn der Abstand von der Sonne einen solchen Werth hat, dass für ihn die Grösse b gleich s_r wird. Ebenfalls wird H_r unendlich, wenn b gleich $-\sigma_r$ wird. Wir haben gefunden, dass b zwischen Mars und Jupiter den Minimalwerth $b_m = 22''.55$ besitzt. Da s_7 gleich 22″.46 und kein s_r ($r = 0, 1, \ldots, 7$) einen grösseren Werth hat, so können die Coefficienten G_r niemals zwischen Mars und Jupiter unendlich werden. Bei den Neigungsgliedern liegt die Sache anders. Hier ist $\sigma_7 = -25''.93$, und also numerisch grösser als b_m. Der Nenner in H_7 kann also verschwinden, und zwar tritt dies ein, wie man aus der Tafel von Norén und

		φ	π	a	G_6	G_7	G_8	A	b
40	Harmonia . . .	2°.67	0°.90	2.267	+0.0 0172	+0.0 2470	+0.0 2083	+0.0 1292	37″.08
117	Lomia	1 .53	38 .19	2.993	+0.0 0215	+0.0 3080	+0.0 1412	+0.0 1729	74 .93
147	Protogeneia . .	2 .04	13 .98	3.136	+0.0 0228	+0.0 3137	+0.0 1389	+0.0 0380	88 .10
189	Phthia	2 .07	9 .40	2.452	+0.0 0183	+0.0 2615	+0.0 1730	+0.0 0650	42 .27
196	Philomela . . .	1 .18	−48 .78	3.116	+0.0 0221	+0.0 3123	+0.0 1392	+0.0 2477	86 .11
205	Martha	1 .92	24 .58	2.780	+0.0 0203	+0.0 2868	+0.0 1477	+0.0 1151	59 .44
215	Oenone	2 .02	−20 .70	2.766	+0.0 0202	+0.0 2858	+0.0 1483	+0.0 1545	58 .56
286	Iclea	0 .71	26 .60	3.196	+0.0 0226	+0.0 3182	+0.0 1383	+0.0 2548	94 .50
292	Ludovica . . .	1 .61	−29 .13	2.530	+0.0 0188	+0.0 2676	+0.0 1643	+0.0 1702	45 .78
300	Geraldina . . .	2 .44	−34 .73	3.209	+0.0 0227	+0.0 3193	+0.0 1382	+0.0 2971	95 .94
338	Budrosa . . .	1 .21	35 .04	2.913	+0.0 0210	+0.0 2970	+0.0 1431	+0.0 1943	68 .61

Raab im Anhang findet, wenn der Abstand von der Sonne gleich 1.951 ist.

Wir wollen einen solchen Abstand, für welchen ein Nenner der Coefficienten G_r oder H_r verschwindet, als einen *kritischen* Abstand bezeichnen.

Würde man nur die Glieder von dem zweiten Grade in der Störungsfunction betrachten, so würde man also zu dem Resultat gelangen, dass die secularen Störungen für diese kritischen Abstände unendlich gross werden.

Anders liegt indessen die Sache, wenn man die höheren Glieder in der Störungsfunction berücksichtigt. Es wird sich in der That dann zeigen, dass die secularen Störungen in diesen kritischen Abständen einen endlichen Werth haben. Statt dessen findet man aber, dass in der Nähe des kritischen Abstandes ein singulärer Punkt liegt, in dem die Störungen zwar nicht unendlich gross werden, doch hohe Werthe bekommen können, und wo ausserdem der Coefficient H_r plötzlich von einem negativen zu einem positiven Werth überspringt.

Indem wir setzen

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \\ y = \operatorname{tg} i \cos \Omega, \end{cases}$$

erhalten wir, wenn die Glieder dritten Grades berücksichtigt werden, folgende Differentialgleichungen[1]

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y\,[b - c\,(x^2 + y^2)] = \sum F_s \cos(\sigma_s t + \delta_s), \\ \dfrac{dy}{dt} - x\,[b - c\,(x^2 + y^2)] = -\sum F_s \sin(\sigma_s t + \delta_s), \end{cases}$$

und hier ist

$$(2^*) \qquad c = \sum \frac{3\, m_i\, \alpha^3\, n}{32} \left(2\, b^{(0)}_{5/2} + b^{(2)}_{5/2}\right),$$

---

[1] Vergleiche einen Aufsatz vom Verf.: „Sur les points singuliers des inégalités séculaires des petites planètes.“ Bulletin Astronomique 1900.

wo $b^0_{3/2}$ und $b^{(2)}_{3/2}$ LAPLACE'sche Coefficienten sind, die durch folgende Reihenentwickelung definirt sind:

$$a_i^{2s}(a^2 - 2\,a\,a_i \cos\varphi + a_i^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}\,b_s^{(0)} + b_s^{(0)} \cos\varphi + b_s^{(2)} \cos 2\,\varphi + \ldots$$

Es ist nicht nothwendig, das *allgemeine* Integral von (2) aufzusuchen. Es genügt in der That das Verhalten des Integrals in der Nähe des kritischen Abstandes zu betrachten, und zu dem Zweck hat man nur ein particuläres Integral aufzufinden, das für $c = 0$ mit dem Ausdruck (12*) im vorigen Paragraphen zusammenfällt.

Wenn σ diejenige Grösse bezeichnet, welche zu einem kritischen Glied in dem Integral Veranlassung geben kann, so genügt es also, folgende Gleichungen zu betrachten

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y\,[b - c\,(x^2 + y^2)] = F \cos(\sigma t + \delta), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} - x\,[b - c\,(x^2 + y^2)] = - F \sin(\sigma t + \delta). \end{cases}$$

Diese Gleichung besitzt offenbar das particuläre Integral

$$(4)\qquad \begin{cases} x = K \sin(\sigma t + \delta), \\ y = K \cos(\sigma t + \delta), \end{cases}$$

und zwar können wir hier *dem Coefficienten K die Bedingung auferlegen, dass er, wenn c gegen Null geht, sich ohne Sprünge dem Grenzwerth*

$$\frac{F}{b + \sigma}$$

nähern soll.

Aus den beiden Gleichungen (3) erhalten wir eine und dieselbe Bedingungsgleichung für K, nämlich

$$(5)\qquad \sigma K + K(b - c\,K^2) = F.$$

Die Grössen b, c und F sind bekannte Functionen des Abstandes des kleinen Planeten von der Sonne.

Für einen solchen Werth des Abstandes — a — für welchen

$$\sigma + b = 0,$$

d. h. in einem Punkt, den wir *kritisch* genannt haben, erhält man aus (5)

$$K = -\sqrt{\frac{F}{c}}, \tag{6}$$

und man sieht, dass K einen endlichen und bestimmten Werth in diesem Punkte hat.

Indessen hat man den singulären Punkt nicht hier zu suchen. Man findet ihn vielmehr, wenn a einen solchen Werth hat, dass die Gleichung (5) eine doppelte Wurzel besitzt.

Wenn man setzt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{b+\sigma}{3c} &= \varkappa, \\ -\frac{F}{2c} &= \lambda, \end{aligned}\right. \tag{7*}$$

so lautet die Gleichung zur Bestimmung von K:

$$K^3 - 3\varkappa K - 2\lambda = 0, \tag{7}$$

welche Gleichung eine Doppelwurzel besitzt, wenn

$$\lambda^2 = \varkappa^3.$$

Wir bezeichnen den Werth von a, für welchen diese Gleichung erfüllt ist, mit a_0. Wenn nun

$$a > a_0,$$

dann ist $\varkappa^3 > \lambda^2$ und die Wurzeln von (7) sind alle reell und verschieden. Wenn dagegen $a < a_0$, so ist $\varkappa^3 < \lambda^2$, und die Gleichung (7) hat nur eine reelle Wurzel.

Wir wollen nun untersuchen, was für eine von den drei reellen Wurzeln, im vorigen Falle, in $\frac{F}{b+\sigma}$ übergeht, wenn c der Null sich nähert.

Die drei Wurzeln sind durch die Formel

$$(8) \qquad K = 2\sqrt{\varkappa}\cos\frac{\theta + 2p\pi}{3} \qquad (p = 0, 1, 2)$$

gegeben, wo

$$(8^*) \qquad \cos\theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\varkappa^3}}.$$

Wird mit θ_0 der kleinste positive Werth bezeichnet, den man aus der obigen Gleichung (8^*) für θ erhält, so haben also die drei Wurzeln K_1, K_2 und K_3 die Werthe

$$K_1 = 2\sqrt{\varkappa}\cos\frac{\theta_0}{3},$$

$$K_2 = 2\sqrt{\varkappa}\cos\left(\frac{\theta_0}{3} + 120^\circ\right),$$

$$K_3 = 2\sqrt{\varkappa}\cos\left(\frac{\theta_0}{3} + 240^\circ\right).$$

Da das Zeichen für F beliebig gewählt werden kann, können wir immer annehmen, dass $\theta_0 < 90^\circ$.

Betrachten wir nun die Werthe dieser Wurzeln für verschwindende Werthe von c. Aus den Formeln für $\varkappa$ und λ folgt, dass $\cos\theta$ gegen Null abnimmt, wenn c verschwindende Werthe annimmt, und man hat für kleine Werthe von c

$$\theta_0 = 90^\circ - f\sqrt{c},$$

wo f eine endliche und positive Grösse bezeichnet.

Es folgt nun, dass K_1 und K_2 unendlich wachsen, wenn c gegen Null abnimmt, und dass

$$\lim_{c=0} K_3 = \frac{F}{b+\sigma}.$$

Es ist also die Wurzel K_3, welche man hier zu wählen hat, um die Grösse K zu repräsentiren, wenn $a > a_0$.

Indem a sich dem Werthe a_0 nähert, nähert sich θ_0 dem Werthe Null und K_3 bekommt den Grenzwerth $-\sqrt{\varkappa}$ oder, was hier dasselbe ist, $-\sqrt[3]{\lambda}$.

Wenn wir dagegen die einzige reelle Wurzel betrachten, welche die Gleichung (7) für $a < a_0$ befriedigt, so ist ihr Werth

$$(9) \qquad K = [\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^3}]^{1/3} + [\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \varkappa^3}]^{1/3}.$$

Im Besonderen erhält man für $a = a_0$ (also auch $\lambda^2 = \varkappa^3$)

$$K = 2\sqrt[3]{\lambda}.$$

In der Nähe des *singulären* Punktes a_0 hat also der Coefficient K folgende bemerkenswerthe Eigenschaft:

Für $a < a_0$ hat K den Werth (9), der für $a = a_0$ in

$$K = 2\sqrt{\lambda^3}$$

übergeht; *indem a den Werth a_0 überschreitet, wechselt K das Zeichen und wird ausserdem auf die Hälfte reducirt. Für $a > a_0$ ist K durch die Formel*

$$(10) \qquad K = 2\sqrt{\varkappa}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^\circ\right)$$

bestimmt, wo θ den kleinsten positiven Winkel bezeichnet, welcher der Gleichung

$$(10^*) \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\varkappa^3}}$$

genügt.

Der singuläre Punkt ist also ein Unstetigkeitspunkt für den Coefficienten K.

Wollen wir diese Resultate auf das Planetensystem anwenden, so hat man die numerischen Werthe der Grössen F, b und c zu ermitteln. Nach der Tafel von Newcomb hat man für F_7, um welchen Coefficienten es sich hier handelt, die folgenden Werthe:

a	F_7
2.2	− 0″.1753
2.4	− 0 .2192
2.6	− 0 .2733
2.8	− 0 .3456
3.0	− 0 .4209
3.2	− 0 .5467

Wir haben hier das Zeichen für F negativ gewählt um einen positiven Werth für λ zu bekommen.

Der singuläre Punkt liegt, wie wir bald finden werden, im Abstand $a_0 = 2.05$. Aus der obigen kleinen Tafel wird man finden, dass man ohne merkbaren Fehler

$$F = -0''.15$$

setzen kann, und diesen Werth habe ich zur Berechnung von $\varkappa$ und λ benutzt.

Indem ich nur die Störungen von Jupiter und Saturn in Betracht gezogen habe, habe ich folgende Werthe für b und c in der Nähe des kritischen Punktes erhalten:

a	b	c	$b + \sigma_7$
1.821	21″.54	21″.58	−4″.39
1.873	22 .80	23 .61	−3 .13
1.925	24 .15	26 .04	−1 .78
1.977	25 .54	28 .61	−0 .39
2.029	27 .00	31 .39	+1 .07
2.081	28 .52	34 .41	+2 .59
2.131	30 .10	37 .67	+4 .17
2.183	31 .76	41 .17	+5 .83

Hier ist σ_7 gleich $-25''.93$ angenommen.

Für $a = 1.99$ erhält man $b + \sigma_7 = 0$. Es ist dieser Abstand,

auf den LEVERRIER sich bezieht, indem er äussert:[1] „Es giebt zwischen Jupiter und der Sonne eine Stelle so beschaffen, dass, wenn eine kleine Masse sich dort befände, die sich in einer Bahn mit kleiner Neigung bewegte, dieselbe sich von ihrer ursprünglichen Bahn entfernen und eine grosse Neigung gegen die Ebene der Jupiterbahn erhalten würde durch die Störungen dieses Planeten und diejenigen Saturns." Durch die Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung wird diese Behauptung insofern modificirt, dass erstens der fragliche Punkt etwas mehr entfernt von der Sonne liegt (wir werden gleich finden, dass der singuläre Punkt für $a_0 = 2.05$ getroffen wird), und dass zweitens die Schwankungen in der Neigung innerhalb ziemlich enger Grenzen liegen.

Für $\varkappa$ und λ erhält man folgende Werthe:

a	$\varkappa$	λ	$\lambda^2 - \varkappa^2$
1.821	−0.0678	+0.00348	+0.0003 239
1.873	−0.0442	+0.00318	+0.0000 964
1.925	−0.0228	+0.00288	+0.0000 201
1.977	−0.0045	+0.00262	+0.0000 070
2.029	+0.0114	+0.00239	+0.0000 042
2.081	+0.0251	+0.00218	−0.0000 110
2.131	+0.0367	+0.00199	−0.0000 463
2.183	+0.0472	+0.00182	−0.0001 019

Die Lage des singulären Punktes ist unmittelbar aus der letzten Columne ersichtlich. Der entsprechende Werth von a ist $a_0 = 2.05$. Man findet, dass dieser Punkt nicht mit dem kritischen Punkt zusammenfällt, obgleich er sich wenig davon entfernt.

Die Werthe von K, welche dem singulären Punkt (a_0) entsprechen, sind

$$K = -0.1326 \quad \text{und}$$

$$K = +0.2652\,.$$

[1] Annales de l'Observatoire de Paris. T. II.

Der letztere Werth entspricht einer Neigung von 14°.8, wenn man von der ursprünglichen Neigung der Planetenbahn absieht.

Die Werthe von K in der Nähe des singulären Punktes sind, nach den Formeln (9) und (10), die folgenden:

a	$K_3 = K$	K_1	K_2
1.821	+0.0340		
1.873	+0.0472		
1.925	+0.0774		
1.977	+0.1470		
2.029	+0.2334		
2.081	−0.0610	+0.2997	−0.2388
2.131	−0.0364	+0.3493	−0.3130
2.183	−0.0258	+0.3877	−0.3627

Ich gebe in der beistehenden Fig. 23 eine graphische Darstellung dieser Werthe, die eine klare Vorstellung von dem Verhalten des Integrals in der Nähe des singulären Punktes giebt.

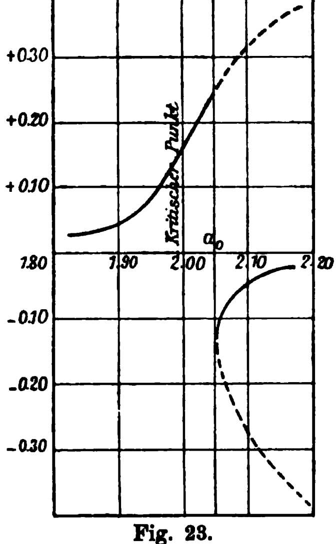


Fig. 23.

Durchmustert man das Verzeichniss der kleinen Planeten, so findet man unter den bis jetzt entdeckten Asteroiden zwei, die in der Nähe dieses singulären Punktes liegen. Der eine ist der interessante Planet (434) Hungaria, im Abstande $a = 1.946$ von der Sonne, und auf der anderen Seite des singulären Punktes liegt der Planet 1893 C, für welchen man indessen nur Kreis-Elemente besitzt, und der nach seiner Entdeckung nicht mehr beobachtet worden ist.

Beispiel. Wir wollen die obigen Auseinandersetzungen auf den Planeten (434) Hungaria anwenden, indem wir dabei nur den Einfluss der Planeten Jupiter und Saturn in Betracht ziehen.

Nach § 9 sind die secularen Störungen von Jupiter und Saturn durch die folgenden Formeln gegeben, wenn nur die drei grossen Glieder mitgenommen werden:

$$
\begin{aligned}
♃ \qquad \sin i_0^{\mathrm{V}} \cos \Omega_0^{\mathrm{V}} = &+ 0.001199 \cos(- 0''.6617\, t + 20^\circ 31') + \\
&+ 0.000879 \cos(- 2''.9161\, t + 133^\circ 56') + \\
&+ 0.006301 \cos(-25''.9346\, t + 306^\circ 19'), \\
♄ \qquad \sin i_0^{\mathrm{VI}} \cos \Omega_0^{\mathrm{VI}} = &+ 0.001158 \cos(- 0''.6617\, t + 20^\circ 31') - \\
&- 0.000718 \cos(- 2''.9161\, t + 133^\circ 56') - \\
&- 0.015693 \cos(-25''.9346\, t + 306^\circ 19').
\end{aligned}
$$

Hieraus soll man nun die Werthe von F_5, F_6 und F_7 berechnen. Diese sind nach § 11 (11) durch die Formel

$$F_r = \sum (0, i)\, N_r^{(i)}$$

gegeben. Für die Coefficienten $(0, i)$ erhält man nach den Tafeln von Norén und Raab ($a = 1.9466$) die Werthe:

$$
\begin{aligned}
(0.5) &= 23''.765\,, \\
(0.6) &= 0''.9382\,,
\end{aligned}
$$

und hieraus

$$
\begin{aligned}
F_5 &= +\, 0''.0296\,, \\
F_6 &= +\, 0''.0202\,, \\
F_7 &= +\, 0''.1350\,,
\end{aligned}
$$

so dass die Differentialgleichungen (2) nun lauten:

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} + y[b - c(x^2 + y^2)] = &\; 0''.0296 \cos(- 0''.6617\, t + 20^\circ 31') + \\
&+ 0''.0202 \cos(- 2''.9161\, t + 133^\circ 56') + \\
&- 0''.1350 \cos(-25''.9346\, t + 126^\circ 19'), \\
\frac{dy}{dt} + x[b - c(x^2 + y^2)] = &- 0''.0296 \sin(- 0''.6617\, t + 20^\circ 31') - \\
&- 0''.0202 \sin(- 2''.9161\, t + 133^\circ 56') - \\
&+ 0''.1350 \sin(-25''.9346\, t + 126^\circ 19').
\end{aligned}
\right.
$$

Hier habe ich das Zeichen des letzten Gliedes gewechselt und gleichzeitig das Argument um 180° verkleinert, um λ positiv zu erhalten.

Den Werth von σ kann man ohne grösseren Fehler der oben gegebenen Tafel entnehmen, in welchem Falle man bekommt:

$$\sigma = 27''.14\,.$$

Ein kleiner Fehler in dem Werth von b ist aber von grossem Einfluss auf das Resultat und man thut deswegen gut, diese Grösse aus der genauen Formel

$$b = \sum_{i=1}^{8}(0,\ i)$$

zu berechnen, indem man also hier auch den Einfluss der übrigen Planeten berücksichtigt, von denen hier Mars und die Erde merkbare Zuschüsse zu b geben. Man bekommt in der That $(0.4) = 0''.43$ und $(0.3) = 0''.51$. Indem also alle Planeten berücksichtigt werden, erhält man aus der Tafel von Norén und Raab (Anhang. Taf. III).

$$b = 25''.834.$$

Würde man bei der Integration der Gleichungen (11) die Glieder dritter Ordnung vernachlässigen, so würde das Integral lauten[1]

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} i \sin \Omega = C \sin(-b\,t + D) + 0.00118 \sin(-\ \ 0''.6617\,t +\ \ 20^\circ 31') + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0.00088 \sin(-\ \ 2''.9161\,t + 133^\circ 56') + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\quad K \quad \sin(-25''.9846\,t + 126^\circ 19')\,, \\ \operatorname{tg} i \cos \Omega = C \cos(-b\,t + D) + \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

wo $K = +\ 1.350$ ist, und man würde in der Neigung eine Störung, welche mehr als 53° beträgt, erhalten. Da indessen hier der Unterschied zwischen b und $-\sigma_7$ nur $0''.100$ beträgt, so ist dies Resultat als völlig illusorisch zu betrachten.

Nennt man K den wahren Werth des Coefficienten des letzten Gliedes in den Ausdrücken (12), so ist nach (7)

$$K^3 - 3\varkappa K - 2\lambda = 0.$$

Für $\varkappa$ und λ bekommt man nach (7*) die Werthe

$$\varkappa = -\ 0.001228\,,$$

$$\lambda = \quad 0.002487\,.$$

---

[1] Für den Fall, dass $\sigma + b$ genau gleich Null ist, ist die Form des Integrals von Idman a. a. O. gegeben worden.

Da λ^2 grösser als $\varkappa^2$ ist, so hat die Gleichung für K eine einzige reelle Wurzel, welche man mittelst (9) berechnen kann. Da indessen $\varkappa$ in diesem Falle sehr klein ist, so genügt es, die Formel

$$K = (2\lambda)^{1/3} = -\sqrt[3]{\frac{F}{c}}$$

zu benutzen. Diese giebt

$$K = +\,0.1707\,,$$

also einen Werth, der fast achtmal so klein ist, wie der aus den Gliedern erster Ordnung erhaltene Werth.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Integrationsconstanten C und D. Aus der Tafel von Pbilander (Anh. II) über die Elemente der kleinen Planeten auf die unveränderliche Ebene bezogen, erhält man

$$i_0 = 22^\circ.01\,,$$

$$\Omega_0 = 178^\circ.29\,,$$

wo die Knotenlänge auf das Aequinoctium 1900.0 bezogen ist. Die Zahlen von Stockwell beziehen sich auf das Aequinoctium und die Epoche 1850.0 und man hat also in (12) $t = 50$ zu setzen.

Wir finden

$$C = +\quad 0.3283\,,$$

$$D = \quad 203^\circ.16$$

und es wird also für (434) Hungaria, wenn die kleinen, mit 0.00118 und 0.00086 multiplicirten Glieder vernachlässigt werden,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin \Omega = &\quad 0.3289 \sin(-25''.834\, t + 202^\circ.58) \\ &+ 0.1707 \sin(-25''.935\, t + 125^\circ.97)\,, \\ \operatorname{tg} i \cos \Omega = &\quad 0.3289 \cos(-25''.834\, t + 202^\circ.58) \\ &+ 0.1707 \cos(-25''.935\, t + 125^\circ.97)\,. \end{aligned}$$

Es findet also für diesen Planeten eine Libration mit Jupiter und Saturn nicht statt.

Die Neigung variirt zwischen den Grenzen:

Kleinster Werth der Neigung	9°.0 ,
Grösster „ „ „	26°.6 .

ANHANG

TAFEL I

DIE ELEMENTE DER GROSSEN PLANETEN AUF DIE UNVERAENDERLICHE EBENE BEZOGEN

TAFEL II

ELEMENTE DER KLEINEN PLANETEN AUF DIE UNVERAENDERLICHE EBENE BEZOGEN

TAFEL III UND IV

HILFSTAFELN ZUR BERECHNUNG DER SECULAREN STÖRUNGEN DER KLEINEN PLANETEN

Tafel I.

Erläuterungen.

Die auf die unveränderliche Ebene bezogenen Elemente der grossen Planeten sind nach PSILANDER a. a. O. gegeben. Die Elemente ω_0, Γ, Ω_0 und i_0 sind der Tafel von PSILANDER direct entlehnt und beziehen sich auf das Aequinoctium 1900.0. Die übrigen Elemente sind dem Berliner Jahrbuch 1900 entnommen. Die Epoche ist für Uranus und Neptun 1850 Jan. 0.0, für die übrigen Planeten 1850 Jan. 1.0. Hinsichtlich der Bezeichnungen verweise ich auf die Erläuterungen zu Tafel II.

Elemente der grossen Planeten.

	M	φ	n	$\log a$
☿ Merkur . . .	252° 0′ 33″.9	11°51′ 53″.7	14732″.41967	9.5878 214
♀ Venus . . .	116 3 3 .0	0 23 31 .5	5767 .66982	9.8593 366
♁ Erde	0 23 33 .0	0 57 39 .4	3548 .19286	0.0000 006
♂ Mars	110 21 39 .7	5 21 4 .5	1886 .51831	0.1828 932
♃ Jupiter . . .	148 6 2 .7	2 45 56 .5	299 .12836	0.7162 168
♄ Saturn . . .	284 45 27 .9	3 12 51 .7	120 .45465	0.9802 194
⛢ Uranus . . .	218 33 53 .4	2 39 25 .7	42 .23079	1.2837 100
♆ Neptun . . .	291 48 7 .8	0 29 12 .5	21 .53302	1.4787 334

	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
☿ Merkur . . .	41° 3′ 59″.9	288° 7′ 25″.0	34°50′ 8″.3	6°20′ 57″.5
♀ Venus . . .	76 1 35 .8	307 26 14 .6	54 8 57 .9	2 11 15 .1
♁ Erde	174 7 35 .9	180 13 17 .0	286 56 0 .3	1 35 19 .4
♂ Mars	338 8 33 .7	249 9 47 .2	355 52 30 .5	1 40 43 .3
♃ Jupiter . . .	55 37 40 .0	210 16 35 .6	316 59 19 .0	0 19 54 .4
♄ Saturn . . .	327 17 21 .8	16 48 30 .6	123 31 14 .0	0 55 48 .7
⛢ Uranus . . .	220 19 40 .5	204 18 38 .2	311 1 21 .5	1 1 49 .9
♆ Neptun . . .	210 24 3 .0	86 52 0 .2	193 34 43 .5	0 43 24 .8



Tafel II.

Erläuterungen.

Die Elemente der kleinen Planeten, auf die unveränderliche Ebene bezogen, sind nach PSILANDER (Meddelanden från Lunds Observatorium Nr. 16) gegeben. Die Elemente ω_0, Γ, Ω_0 und i_0 sind der Tafel von PSILANDER direct entlehnt. Die übrigen Elemente sind dem Berliner Jahrbuch 1902 entnommen. Die Buchstaben haben hier folgende Bedeutung. Es ist

m_0 = diejenige Grösse (Helligkeit), welche der Planet in seiner mittleren Entfernung a von der Sonne und der gleichzeitigen Entfernung $a - 1$ von der Erde haben würde;

M = die mittlere Anomalie des Planeten zu der angegebenen Epoche;

φ = der Excentricitätswinkel ($e = \sin\varphi$);

n = die mittlere Bewegung;

a = die halbe grosse Achse;

ω_0 = Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten der Planetenbahn auf der unveränderlichen Ebene;

Γ = Abstand des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der unveränderlichen Ebene vom absteigenden Knoten der Ecliptik auf der unveränderlichen Ebene;

Ω_0 = die Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der unveränderlichen Ebene, bezogen auf das mittlere Aequinoctium 1900.0. [Wird die Länge des aufsteigenden Knotens der unveränderlichen Ebene auf der Ecliptik 1900 mit Π bezeichnet, so ist also $\Omega_0 = \Gamma + \Pi$].

i_0 = die Neigung der Planetenbahn gegen die unveränderliche Ebene.

ω = Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten der Planetenbahn auf der Ecliptik.

σ = $\omega - \omega_0$.

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
1. Ceres	7.4	1900 Juli 24.0	152°36′ 3″.6	4°30′ 14″.9
2. Pallas	8.0	1900 Juli 24.0	153 58 40 .2	13 44 16 .0
3. Juno	8.7	1900 Oct. 4.0	330 58 54 .7	14 54 14 .4
4. Vesta	6.5	1899 Oct. 9.0	119 38 30 .0	5 7 1 .2
5. Astræa	9.9	1898 Sept. 11.0	224 4 1 .2	11 1 8 .5
6. Hebe	8.5	1900 Juli 3.0	284 20 20 .1	11 35 3 .1
7. Iris	8.4	1900 Jan. 0.0	9 5 20 .1	13 20 50 .2
8. Flora	8.9	1848 Jan. 1.0	35 52 49 .3	9 0 54 .4
9. Metis	8.9	1858 Juni 30.0	57 4 34 .7	7 5 2 .4
10. Hygiæa	9.5	1898 Dec. 20.0	291 20 17 .9	6 53 27 .8
11. Parthenope	9.3	1900 Mai 24.0	292 39 8 .5	5 46 3 .4
12. Victoria	9.7	1851 Jan. 0.0	66 2 39 .9	12 38 44 .9
13. Egeria	9.7	1850 Jan. 0.0	210 46 34 .3	4 59 47 .3
14. Irene	9.7	1898 Oct. 1.0	180 47 34 .9	9 20 51 .3
15. Eunomia	8.6	1854 Jan. 0.0	122 5 31 .5	10 47 32 .2
16. Psyche	9.6	1899 Juli 27.0	301 1 33 .0	7 50 18 .3
17. Thetis	10.1	1900 Oct. 31.0	112 53 10 .3	7 33 55 .8
18. Melpomene	9.3	1854 Jan. 0.0	80 4 37 .0	12 34 20 .2
19. Fortuna	9.8	1900 März 25.0	125 39 18 .8	9 9 40 .0
20. Massalia	9.2	1899 März 29.0	76 24 22 .5	8 17 46. 2
21. Lutetia	10.1	1853 Jan. 2.0	74 20 5 .1	9 19 44 .6
22. Kalliope	9.8	1898 Oct. 1.0	96 34 37 .0	5 38 34 .5
23. Thalia	10.5	1900 Jan. 3.0	337 2 2 .1	13 32 59 .4
24. Themis	10.8	1897 Dec. 25.0	40 55 3 .7	7 50 15 .3
25. Phocæa	10.5	1898 Aug. 2.0	7 21 33 .6	14 39 21 .4
26. Proserpina	10.5	1853 Juni 11.0	351 5 55 .6	5 0 37 .3
27. Euterpe	9.7	1873 Jan. 5.0	90 32 27 .0	10 0 56 .0
28. Bellona	10.1	1898 Sept. 11.0	258 21 43 .7	8 38 54 .6
29. Amphitrite	9.0	1855 Jan. 0.0	198 1 40 .2	4 15 25 .3
30. Urania	9.9	1890 Juni 5.0	239 51 48 .5	7 21 5 .1
31. Euphrosyne	11.0	1899 Oct. 15.0	327 7 12 .3	12 52 34 .7
32. Pomona	10.6	1855 Jan. 0.0	223 54 39 .3	4 45 43 .1
33. Polyhymnia	11.8	1900 Jan. 0.0	137 40 57 .3	19 41 13 .8
34. Circe	11.5	1897 Dec. 5.0	288 24 37 .6	6 4 35 .9
35. Leukothea	12.2	1898 Sept. 11.0	127 21 38 .2	12 42 36 .2

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
771″.2414	0.4418 775	74°41′ 23″.0	329°38′ 43″.7	76°21′ 27″.1	9°13′ 25″.8
768 .6565	0.4428 495	306 41 16 .8	68 15 2 .5	174 57 45 .8	34 3 53 .7
813 .8326	0.4268 143	238 5 22 .5	70 30 10 .9	177 12 54 .2	12 24 45 .3
977 .6889	0.3732 039	149 16 6 .3	355 54 12 .1	102 36 55 .4	5 33 17 .6
858 .1895	0.4109 489	340 47 50 .7	47 26 5 .2	154 8 48 .6	4 7 59 .6
939 .1860	0.3848 366	233 20 11 .6	35 26 35 .6	142 9 18 .9	18 28 50 .3
962 .5828	0.3777 123	135 43 5 .4	159 37 22 .3	266 20 5 .6	6 55 33 .6
086 .3382	0.3426 943	281 8 1 .6	5 47 59 .3	112 30 42 .7	4 18 7 .4
962 .3390	0.3777 857	15 10 32 .6	309 48 12 .7	56 30 56 .1	4 27 8 .1
639 .1669	0.4962 621	308 42 13 .4	179 21 51 .5	286 4 34 .8	5 23 59 .2
923 .2874	0.3897 798	184 8 22 .6	27 43 37 .3	134 26 20 .7	3 9 44 .3
994 .8347	0.3681 389	58 35 37 .1	136 56 42 .0	243 39 25 .4	9 28 28 .7
857 .9451	0.4110 315	82 9 16 .2	292 12 11 .4	38 54 54 .7	15 52 53 .2
851 .4287	0.4132 389	96 5 3 .2	336 15 16 .2	82 57 59 .6	7 35 3 .2
825 .4550	0.4222 090	94 54 28 .9	186 54 37 .6	293 37 20 .9	13 18 51 .7
710 .5554	0.4656 058	196 25 2 .6	73 25 27 .7	180 8 11 .0	2 13 14 .7
912 .9107	0.3930 522	130 38 13 .2	25 26 49 .9	132 9 33 .2	4 8 12 .1
1020 .1198	0.3609 032	218 2 29 .5	50 52 58 .1	157 35 41 .5	9 4 26 .9
930 .1666	0.3876 305	141 26 16 .1	142 45 26 .0	249 28 9 .3	2 28 53 .1
949 .0005	0.3818 268	195 24 6 .9	158 21 1 .2	265 3 44 .6	1 50 1 .0
933 .5544	0.3865 780	269 15 53 .5	311 46 40 .5	58 29 23 .9	1 47 38 .2
714 .4288	0.4640 317	356 39 16 .2	315 15 31 .5	61 58 14 .9	12 33 19 .9
833 .5369	0.4193 879	62 20 45 .5	314 51 58 .9	61 34 42 .2	9 2 12 .5
640 .5990	0.4956 138	186 8 20 .7	209 47 24 .8	316 30 8 .1	1 31 38 .9
954 .0992	0.3802 754	84 48 32 .3	111 14 45 .8	217 57 29 .2	22 8 20 .6
819 .6847	0.4242 399	216 40 38 .0	273 43 28. 0	20 26 11 .4	3 7 52 .0
986 .6944	0.3705 493	77 10 51 .6	264 31 16 .2	11 13 59 .6	0 20 53 .0
765 .9782	0.4438 601	331 37 36 .9	44 49 7 .4	151 31 50 .8	8 10 7 .6
869 .0352	0.4073 128	72 23 25 .8	237 46 47 .2	344 29 30 .6	6 49 10 .0
975 .3144	0.3739 080	92 58 33 .4	192 17 39 .8	299 0 23 .1	3 37 20 .2
635 .0803	0.4981 187	63 52 39 .3	281 54 57 .5	28 37 40 .8	26 5 51 .9
852 .5880	0.4128 449	319 21 45 .5	127 50 51 .6	234 33 34 .9	6 18 18 .5
731 .7057	0.4571 134	10 37 8 .4	226 0 15 .0	332 42 58 .4	2 38 51 .0
805 .6011	0.4292 575	310 3 36 .3	94 53 54 .8	201 36 38 .1	5 21 43 .6
683 .6866	0.4767 663	215 0 27 .3	239 32 55 .0	346 15 38 .8	8 53 8 .5

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
36. Atalante	12.0	1899 Mai 8.0	179° 27′ 12″.1	17° 26′ 19″.0
37. Fides	10.4	1900 März 5.0	78 37 55 .9	10 15 7 .8
38. Leda	11.4	1897 Febr. 8.0	31 52 32 .7	8 53 45 .4
39. Lætitia	9.5	1897 Jan. 19.0	111 43 50 .9	6 23 16 .8
40. Harmonia . . .	9.2	1863 Jan. 0.0	186 48 19 .4	2 40 13 .6
41. Daphne	10.5	1896 Dec. 30.0	278 7 19 .3	15 27 11 .7
42. Isis.	10.4	1901 März 20.0	220 37 25 .4	12 50 33 .9
43. Ariadne	10.0	1897 Oct. 6.0	80 15 48 .4	9 38 32 .6
44. Nysa	9.8	1891 April 1.0	101 29 32 .1	8 48 10 .9
45. Eugenia	10.7	1890 Nov. 12.0	180 7 31 .7	4 44 11 .6
46. Hestia.	10.6	1900 März 5.0	185 43 16 .4	9 35 32 .3
47. Aglaja	11.2	1898 Dec. 20.0	193 12 16 .1	7 42 46 .5
48. Doris	10.9	1890 Sept. 13.0	277 3 7 .4	3 30 16 .7
49. Pales	11.0	1898 März 15.0	133 1 8 .6	12 52 28 .4
50. Virgina	11.7	1890 April 6.0	193 9 42 .2	16 45 58 .0
51. Nemausa. . . .	9.8	1889 Nov. 17.0	254 26 43 .1	3 51 23 .3
52. Europa	10.3	1891 April 1.0	65 39 33 .0	6 31 44 .8
53. Kalypso	11.5	1898 Sept. 11.0	262 39 8 .8	11 56 45 .7
54. Alexandra . . .	10.9	1884 Aug. 15.0	316 55 13 .5	11 31 49 .2
55. Pandora	10.8	1885 Jan. 22.0	263 33 12 .6	8 18 56 .3
56. Melete	11.3	1900 Dec. 10.0	152 34 12 .0	13 24 3 .3
57. Mnemosyne . . .	10.7	1897 Juni 28.0	231 1 17 .6	6 49 36 .3
58. Concordia . . .	11.6	1865 Jan. 7.0	21 24 4 .2	2 26 21 .8
59. Elpis	10.9	1865 Jan. 7.0	334 18 57 .1	6 44 2 .7
60. Echo	11.1	1897 Oct. 6.0	272 15 22 .3	10 34 22 .7
61. Danaë.	11.0	1900 April 14.0	244 20 50 .4	9 29 23 .8
62. Erato	12.3	1877 Sept. 21.0	358 43 44 .3	10 6 47 .4
63. Ausonia	9.9	1898 Febr. 3.0	250 44 8 .5	7 17 58 .7
64. Angelina. . . .	10.5	1898 Oct. 1.0	239 38 51 .2	7 17 59 .7
65. Cybele	11.0	1900 Juni 13.0	0 34 8 .2	5 51 5 .0
66. Maja	12.2	1897 Juli 18.0	277 50 28 .5	10 3 43 .4
67. Asia	11.2	1897 Dec. 5.0	201 20 50 .1	10 47 54 .5
68. Leto	10.5	1898 April 24.0	236 41 25 .3	10 39 16 .0
69. Hesperia	10.7	1889 Jan. 1.0	182 52 57 .9	9 39 2 .0
70. Panopæa	10.9	1890 Dec. 22.0	305 21 16 .5	10 22 15 .9

n	$\log a$	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
777″.3458	0.4395 950	49° 2′ 52″.5	248° 2′ 50″.8	354°45′ 34″.1	19°11′ 52″.7
826 .9450	0.4216 867	84 0 2 .7	286 17 10 .3	342 59 53 .6	8 41 25 .2
781 .8518	0.4379 215	167 59 45 .0	187 58 27 .2	294 41 10 .6	8 31 54 .9
769 .6407	0.4424 791	197 58 6 .2	58 5 31 .3	164 48 14 .7	9 26 40 .3
1039 .3358	0.3555 000	274 41 37 .5	340 1 32 .4	86 44 15 .8	2 44 14 .4
770 .8841	0.4420 117	36 17 28 .3	77 38 53 .7	184 21 37 .0	15 30 40 .9
930 .2275	0.3876 117	289 4 24 .5	332 49 22 .7	79 32 6 .1	7 7 33 .6
1084 .7577	0.3431 159	7 7 34 .2	164 52 35 .4	271 35 18 .7	4 58 5 .6
941 .7863	0.3840 515	324 16 19 .8	40 47 6 .3	147 29 49 .7	2 21 8 .5
791 .0695	0.4345 280	71 42 8 .5	52 22 12 .7	159 4 56 .0	5 30 2 .8
884 .5855	0.4021 779	183 37 10 .9	113 55 19 .7	220 38 3 .0	2 25 10 .2
726 .7211	0.4590 926	326 9 12 .9	241 16 40 .6	347 59 24 .0	5 34 31 .8
645 .5014	0.4934 063	237 29 0 .0	92 2 2 .9	198 44 46 .2	6 22 8 .1
648 .4580	0.4920 854	105 18 30 .8	181 58 19 .4	288 41 2 .8	4 48 31 .1
823 .5561	0.4228 757	163 5 12 .9	100 44 48 .5	207 27 31 .8	2 37 58 .9
975 .1593	0.3739 540	349 29 38 .7	78 3 2 .1	184 45 45 .5	9 30 20 .0
651 .8134	0.4905 889	330 1 23 .6	29 1 28 .1	185 44 11 .4	6 0 42 .3
837 .9945	0.4178 437	295 52 32 .9	51 7 1 .3	157 49 44 .6	8 58 42 .3
795 .5362	0.4328 971	345 8 59 .7	204 5 24 .0	310 48 7 .3	13 13 23 .6
774 .4612	0.4406 718	12 58 26 .1	252 22 4 .6	359 4 48 .0	7 32 38 .6
846 .1050	0.4150 549	89 49 57 .3	98 29 7 .9	205 11 51 .2	8 8 5 .0
635 .2903	0.4980 229	204 9 5 .8	99 5 26 .6	205 48 9 .9	15 22 1 .7
799 .5964	0.4314 238	10 18 12 .9	72 35 0 .9	179 17 44 .3	4 19 7 .0
793 .9788	0.4334 651	197 48 47 .9	74 15 8 .5	180 57 46 .8	8 8 0 .5
958 .2244	0.3790 268	243 20 51 .8	109 44 53 .6	216 27 36 .9	3 47 45 .8
688 .3554	0.4747 959	11 59 30 .2	224 11 38 .4	330 54 21 .7	19 21 16 .6
642 .5659	0.4947 260	286 47 14 .3	55 45 45 .6	162 28 29 .0	0 52 50 .3
957 .1671	0.3793 459	308 17 23 .4	220 57 7 .7	327 39 51 .1	6 53 26 .6
807 .9036	0.4284 314	186 47 26 .6	190 58 45 .5	297 41 28 .9	2 50 54 .2
556 .3938	0.5364 162	71 18 30 .5	78 37 12 .5	185 19 55 .8	2 47 57 .2
824 .7740	0.4224 477	65 30 48 .9	236 16 39 .6	342 59 23 .0	3 40 2 .7
942 .3560	0.3838 611	88 57 14 .3	110 31 9 .4	217 13 52 .8	6 21 25 .0
763 .4868	0.4448 033	312 43 24 .4	287 6 8 .4	33 48 51 .7	7 21 41 .9
689 .6731	0.4742 422	273 55 57 .5	90 38 57 .6	197 21 40 .9	8 22 3 .2
838 .9960	0.4174 978	259 59 37 .1	294 31 9 .0	41 13 52 .3	10 53 31 .8

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
71. Niobe	10.7	1898 Oct. 1.0	134° 2′ 10″.3	9° 57′ 51″.8
72. Feronia	11.2	1897 Dec. 25.0	166 4 16 .3	6 56 42 .6
73. Klytia	12.0	1898 Aug. 2.0	244 29 58 .1	2 34 3 .9
74. Galatea	11.8	1897 Febr. 28.0	148 4 45 .2	13 43 0 .6
75. Eurydice	11.6	1897 Oct. 26.0	32 23 13 .9	17 45 42 .2
76. Freia	12.0	1900 Nov. 20.0	383 40 15 .1	9 44 21 .2
77. Frigga	11.1	1897 Oct. 6.0	331 13 52 .7	7 38 43 .5
78. Diana	10.6	1899 Sept. 6.0	253 25 1 .6	12 5 4 .7
79. Eurynome . . .	10.5	1900 Mai 24.0	188 49 51 .5	11 0 31 .8
80. Sappho	10.6	1896 Oct. 11.0	19 11 20 .1	11 34 29 .9
81. Terpsichore . . .	11.8	1897 Juli 18.0	260 37 9 .1	12 11 52 .3
82. Alkmene	11.2	1900 Sept. 11.0	236 55 47 .1	12 51 55 .9
83. Beatrix	11.3	1891 Jan. 11.0	295 16 6 .4	4 51 24 .3
84. Klio	11.3	1897 April 29.0	252 50 4 .7	13 40 0 .3
85. Io	10.9	1889 Febr. 10.0	180 9 35 .1	11 10 33 .7
86. Semele	12.4	1896 Mai 4.0	203 38 24 .5	12 46 54 .2
87. Sylvia	11.9	1898 April 24.0	236 42 47 .7	5 26 44 .5
88. Thisbe	10.8	1889 Dec. 27.0	25 33 30 .8	9 26 6 .4
89. Julia	10.1	1889 Dec. 27.0	237 15 2 .3	10 33 29 .3
90. Antiope	11.6	1898 April 4.0	277 45 51 .5	8 53 22 .1
91. Aegina	11.3	1895 Oct. 17.0	301 7 37 .1	6 5 9 .2
92. Undina	10.9	1896 Sept. 1.0	30 19 59 .7	5 35 51 .8
93. Minerva	10.8	1897 Jan. 19.0	213 22 8 .2	8 1 55 .7
94. Aurora	11.3	1883 Juli 12.0	256 3 4 .3	4 44 18 .3
95. Arethusa	11.3	1897 April 29.0	187 44 18 .9	8 49 13 .9
96. Aegle	11.4	1897 Sept. 16.0	182 59 36 .0	7 39 35 .3
97. Klotho	10.6	1898 Jan. 14.0	21 4 31 .9	14 51 9 .1
98. Ianthe	11.6	1897 Nov. 15.0	283 55 20 .7	10 50 24 .7
99. Dike	14	1868 Juni 5.0	350 36 11	13 47 30
100. Hekate	11.9	1898 Jan. 14.0	156 19 38 .0	9 31 58 .5
101. Helena	10.7	1897 Aug. 27.0	8 56 38 .1	8 1 10 .2
102. Miriam	12.6	1898 Juli 13.0	319 11 42 .8	14 44 31 .2
103. Hera	10.2	1897 Febr. 8.0	173 11 18 .9	4 30 21 .[illegible]
104. Klymene	12.2	1897 Dec. 25.0	35 9 54 .6	8 32 48 .[illegible]
105. Artemis	11.1	1897 Aug. 27.0	69 55 41 .8	10 6 59 .[illegible]

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
775″.1865	0.4404 003	267°32′ 10″.7	207°56′ 47″.0	314°39′ 30″.3	24°40′ 17″.8
1040 .3544	0.3552 169	85 10 54 .7	116 23 41 .3	223 6 24 .6	5 54 52 .0
816 .0117	0.4255 401	83 15 4 .5	230 21 50 .6	337 4 34 .0	3 4 56 .2
764 .6230	0.4448 728	149 31 39 .6	112 26 36 .4	219 9 19 .8	4 20 8 .3
812 .4299	0.4268 337	351 9 13 .7	237 44 31 .8	344 27 15 .1	5 39 40 .9
562 .3352	0.5333 409	204 49 25 .4	137 13 5 .5	243 55 48 .9	2 54 13 .6
813 .8298	0.4263 153	85 5 43 .0	227 9 10 .4	333 51 53 .7	3 14 41 .2
837 .1977	0.4181 191	155 44 46 .5	220 24 48 .6	327 7 31 .9	9 50 8 .5
927 .2856	0.3885 287	180 27 5 .1	117 39 4 .6	224 21 47 .9	5 7 13 .8
1020 .1090	0.3609 067	127 47 58 .3	120 58 0 .1	227 40 43 .4	9 19 53 .9
736 .4126	0.4552 583	56 45 58 .1	245 18 30 .2	352 1 13 .5	8 26 53 .4
773 .3986	0.4410 688	138 18 34 .0	248 39 39 .6	355 22 22 .9	3 1 11 .6
935 .9122	0.3858 476	181 46 36 .5	262 38 24 .9	9 21 8 .2	4 56 44 .5
977 .4411	0.3732 774	18 28 56 .0	215 15 21 .9	321 58 5 .3	10 36 27 .4
821 .0524	0.4237 571	112 48 7 .9	104 22 34 .9	211 5 18 .3	12 11 36 .1
650 .4530	0.4911 938	309 14 48 .2	332 23 24 .8	79 6 8 .2	3 19 53 .7
545 .3288	0.5422 321	270 34 18 .5	323 29 50 .8	70 12 34 .2	9 34 5 .1
771 .1774	0.4419 015	28 46 12 .6	173 4 45 .3	279 47 28 .6	6 49 9 .6
871 .5645	0.4064 714	45 3 55 .0	203 2 0 .1	309 44 43 .5	17 39 21 .8
632 .5389	0.4992 796	274 58 39 .3	281 18 3 .5	28 0 46 .9	1 20 40 .8
851 .5394	0.4132 012	106 16 22 .6	229 47 26 .7	336 30 10 .1	2 47 15 .7
622 .7897	0.5037 768	222 54 18 .7	355 30 17 .6	102 13 0 .9	8 20 56 .9
775 .6316	0.4402 341	280 47 21 .6	248 25 8 .2	355 7 51 .6	9 2 48 .2
630 .6584	0.5001 416	55 51 26 .7	247 19 56 .4	354 2 39 .8	8 32 56 .4
661 .2229	0.4864 391	145 47 46 .0	141 36 18 .7	248 19 9 .0	14 7 32 .7
663 .1502	0.4855 965	203 42 0 .8	212 56 26 .9	319 39 10 .2	17 20 51 .5
813 .5778	0.4264 050	257 47 38 .0	60 46 38 .4	167 29 21 .7	10 54 15 .6
805 .3408	0.4293 513	160 21 41 .3	242 32 2 .5	349 14 45 .9	16 14 4 .6
758 .662	0.4466 4	205 3 19	289 22 49	36 5 33	13 17 7
653 .5823	0.4898 043	170 2 8 .3	28 21 21 .0	135 4 4 .3	4 56 45 .9
854 .8620	0.4120 737	350 52 35 .8	230 4 41 .2	336 47 24 .5	11 7 13 .1
817 .8380	0.4248 929	128 2 4 .9	220 20 26 .7	227 3 10 .1	5 42 19 .9
798 .0990	0.4319 669	174 58 8 .1	40 33 27 .9	147 16 11 .3	4 6 22 .1
632 .5948	0.4992 527	53 8 57 .4	263 16 23 .3	9 59 6 .7	2 35 54 .1
970 .4600	0.3753 527	50 24 39 .1	85 24 44 .8	192 7 28 .1	21 20 3 .3

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
106. Dione	11.3	1900 April 14.0	204° 55′ 38″.9	9° 33′ 38″.5
107. Camilla	11.2	1891 April 21.0	97 7 57 .4	3 56 39 .0
108. Hecuba	11.7	1900 Sept. 1.0	183 56 17 .6	6 2 52 .0
109. Felicitas	12.0	1898 Jan. 14.0	115 33 32 .5	17 12 53 .0
110. Lydia	10.5	1888 Febr. 16.0	197 35 50 .6	4 37 36 .1
111. Ate	11.3	1890 Jan. 16.0	91 26 4 .4	5 58 35 .2
112. Iphigenia	11.5	1897 Dec. 25.0	88 12 11 .4	7 25 29 .0
113. Amalthea	11.0	1900 Jan. 24.0	296 3 39 .4	5 1 18 .0
114. Kassandra	11.1	1889 Sept. 18.0	211 30 3 .4	7 55 32 .6
115. Thyra	10.4	1897 Oct. 6.0	340 57 26 .1	11 5 7 .8
116. Sirona	10.7	1889 Juni 10.0	158 3 13 .7	8 3 59 .9
117. Lomia	11.4	1897 Oct. 6.0	332 35 55 .4	1 31 51 .9
118. Peitho	10.8	1900 Juli 23.0	239 56 50 .6	9 28 46 .9
119. Althæa	10.6	1898 Aug. 2.0	314 33 34 .0	4 42 49 .9
120. Lachesis	11.7	1897 Nov. 15.0	202 19 20 .3	3 30 1 .0
121. Hermione	11.2	1900 Nov. 20.0	57 32 29 .1	7 59 0 .0
122. Gerda	11.5	1900 Mai 24.0	55 49 33 .7	2 58 8 .0
123. Brunhild	11.8	1898 Juni 23.0	210 35 25 .0	7 1 21 .7
124. Alceste	10.3	1890 Dec. 2.0	180 26 7 .9	4 27 41 .2
125. Liberatrix	11.2	1897 Jan. 19.0	202 46 5 .6	4 29 45 .0
126. Velleda	11.5	1899 Dec. 15.0	81 59 24 .9	6 3 49 .4
127. Johanna	10.5	1890 Oct. 3.0	251 23 46 .9	3 47 29 .9
128. Nemesis	10.6	1897 Jan. 19.0	144 20 2 .3	7 13 52 .8
129. Antigone	10.3	1897 Jan. 19.0	253 10 0 .2	12 15 18 .0
130. Elektra	10.6	1898 Aug. 22.0	337 5 55 .3	12 29 21 .9
131. Vala	12.2	1898 Dec. 20.0	288 37 28 .9	3 51 52 .5
132. Aethra	11.1	1895 Nov. 30.5	330 47 37 .2	19 21 13 .8
133. Cyrene	11.3	1898 Jan. 14.0	280 4 53 .4	8 2 47 .1
134. Sophrosyne	11.1	1897 Juli 18.0	235 51 37 .8	6 43 11 .6
135. Hertha	10.5	1898 Oct. 1.0	33 3 56 .2	11 45 17 .6
136. Austria	11.2	1898 März 15.0	211 14 20 .2	4 52 0 .8
137. Melibœa	11.8	1898 Nov. 10.0	80 12 0 .8	12 46 22 .0
138. Tolosa	11.8	1896 Febr. 14.0	190 23 49 .0	9 16 35 .8
139. Juewa	10.9	1898 Nov. 30.0	299 0 11 .9	9 57 48 .4
140. Siwa	11.4	1898 Oct. 1.0	173 35 23 .3	12 31 19 .9

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
629″.1696	0.5008 259	340°41′11″.7	299° 8′54″.1	45°46′37″.5	3°38′ 1″.3
544 .1827	0.5428 412	284 51 35 .9	78 21 38 .0	185 4 21 .4	9 25 13 .1
617 .3856	0.5060 657	191 3 36 .7	229 43 55 .2	336 26 38 .5	5 14 53 .0
799 .9088	0.4313 108	62 56 34 .8	247 24 18 .8	354 7 2 .1	8 29 28 .5
785 .9425	0.4364 105	292 45 21 .2	297 3 11 .9	43 45 55 .3	5 6 20 .0
849 .9712	0.4137 349	168 22 38 .6	195 2 19 .0	301 45 2 .3	6 27 9 .8
934 .8048	0.3861 905	28 5 24 .0	203 26 4 .0	310 8 47 .3	3 59 47 .0
969 .0731	0.3757 667	69 39 58 .1	23 49 45 .4	130 32 28 .8	3 32 38 .5
810 .5220	0.4274 945	330 28 8 .8	76 6 44 .2	182 49 27 .5	4 16 16 .0
966 .3219	0.3765 898	96 43 47 .5	199 51 17 .4	306 34 0 .7	13 4 19 .2
770 .3736	0.4422 03	112 55 27 .2	294 4 16 .3	40 46 59 .7	2 38 1 .0
685 .2178	0.4761 187	53 51 10 .7	237 48 29 .1	344 31 12 .5	15 43 26 .5
932 .7235	0.3868 358	42 30 38 .3	289 52 18 .5	36 35 1 .8	7 5 31 .1
855 .7364	0.4117 777	153 42 22 .9	111 54 42 .3	218 37 25 .6	6 8 22 .7
645 .4399	0.4934 339	247 0 5 .3	226 30 38 .0	333 13 21 .8	8 0 1 .8
554 .6699	0.5373 147	287 31 5 .1	322 44 54 .4	69 27 37 .8	6 15 27 .7
614 .0713	0.5078 585	322 35 11 .6	125 27 6 .7	232 9 50 .0	1 52 42 .6
802 .5894	0.4303 421	126 31 19 .9	197 32 19 .1	304 15 2 .4	7 55 5 .1
832 .2976	0.4198 186	28 2 56 .6	111 55 20 .9	218 38 4 .2	3 7 18 .4
780 .9349	0.4382 611	85 41 13 .2	82 33 29 .8	189 16 13 .2	4 9 13 .7
931 .5174	0.3872 104	355 31 28 .7	246 53 48 .0	353 36 31 .4	3 10 30 .6
775 .8987	0.4401 344	101 30 44 .3	274 4 53 .2	20 47 36 .6	7 59 45 .7
778 .9624	0.4389 934	309 49 13 .8	320 41 24 .2	67 24 7 .6	4 56 37 .9
730 .5585	0.4575 677	99 20 28 .8	35 23 49 .9	142 6 38 .3	10 50 27 .6
646 .4298	0.4929 901	231 2 53 .7	41 56 28 .0	148 39 11 .8	21 45 55 .0
935 .8550	0.3858 654	171 25 57 .4	303 19 25 .3	50 2 8 .7	3 54 40 .9
903 .6882	0.3959 920	250 38 57 .4	154 52 28 .7	261 35 12 .1	24 57 57 .5
662 .6045	0.4858 348	290 0 23 .7	208 35 21 .7	315 18 5 .1	8 34 57 .2
864 .4642	0.4088 397	87 46 40 .4	233 24 5 .5	340 6 48 .8	12 28 45 .5
937 .0637	0.3854 917	0 2 29 .6	214 29 34 .7	321 12 18 .0	3 26 1 .8
1025 .7532	0.3593 092	120 53 9 .4	88 57 48 .6	195 40 31 .9	9 23 40 .5
645 .4607	0.4934 245	98 54 25 .0	103 26 57 .6	210 9 40 .9	13 38 4 .2
924 .9117	0.3892 709	287 8 36 .0	278 59 59 .3	25 42 42 .7	2 34 4 .3
764 .0768	0.4445 797	169 56 5 .5	248 3 29 .5	354 46 12 .8	11 24 54 .3
786 .6737	0.4361 418	192 46 52 .7	0 48 30 .3	107 31 13 .7	1 36 21 .6

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
141. Lumen	11.4	1890 Aug. 24.0	321° 2′ 54″.7	12° 16′ 57″.4
142. Polana	12.2	1896 Dec. 10.0	211 12 47 .7	7 44 10 .6
143. Adria	12.4	1891 Oct. 18.0	160 45 41 .3	4 8 20 .2
144. Vibilia	10.7	1888 Juli 18.0	289 54 28 .9	13 28 14 .3
145. Adeona	11.3	1898 Aug. 22.0	240 12 41 .7	8 24 20 .6
146. Lucina	11.1	1898 Aug. 2.0	89 1 10 .2	3 39 14 .6
147. Protogenia	12.5	1898 Sept. 11.0	348 52 28 .8	2 2 8 .6
148. Gallia	11.0	1900 Jan. 24.0	60 23 35 .9	10 42 16 .6
149. Medusa	12.9	1900 Mai 24.0	200 8 29 .0	3 50 11 .2
150. Nuwa	11.6	1893 März 1.0	155 36 25 .8	7 20 7 .3
151. Abundantia	11.7	1896 Nov. 20.0	255 13 12 .2	2 9 0 .7
152. Atala	12.2	1899 Jan. 29.0	27 31 7 .9	4 12 12 .4
153. Hilda	12.6	1901 Jan. 19.0	178 32 13 .6	9 31 9 .8
154. Bertha	12.2	1900 Jan. 4.0	290 52 56 .2	4 39 8 .1
155. Scylla	13.5	1875 Nov. 8.5	339 4 47	14 49 28
156. Xanthippe	11.9	1875 Nov. 27.5	286 31 33 .6	15 17 23 .2
157. Dejanira	14.7	1875 Dec. 27.5	340 48 39 .7	12 8 59 .6
158. Koronis	12.3	1898 Aug. 22.0	278 50 53 .8	3 17 38 .9
159. Aemilia	12.3	1897 Dec. 5.0	324 40 17 .3	5 37 45 .9
160. Una	11.8	1897 Dec. 25.0	33 30 8 .8	3 45 8 .1
161. Athor	11.0	1896 Dec. 30.0	142 39 1 .6	7 57 23 .4
162. Laurentia	12.3	1899 Sept. 6.0	215 30 54 .3	10 31 5 .9
163. Erigone	12.0	1899 Aug. 17.0	244 4 42 .0	11 1 5 .2
164. Eva	11.5	1900 Febr. 13.0	127 58 28 .1	20 18 45 .1
165. Loreley	11.1	1897 April 9.0	290 21 20 .7	3 54 10 .6
166. Rhodope	12.5	1897 Juni 8.0	213 52 27 .9	12 13 13 .9
167. Urda	13.0	1898 Jan. 14.0	197 17 5 .7	1 59 3 .7
168. Sibylla	11.6	1899 Mai 29.0	218 22 50 .2	4 21 54 .0
169. Zelia	11.3	1890 Aug. 4.0	328 1 8 .3	7 31 33 .7
170. Maria	11.7	1900 Nov. 20.0	325 25 32 .4	3 44 28 .8
171. Ophelia	12.1	1897 Oct. 6.0	236 0 17 .5	6 38 28 .6
172. Baucis	10.4	1889 Juni 30.0	316 43 41 .4	6 32 18 .8
173. Ino	11.0	1897 Jan. 19.0	71 13 19 .6	11 51 44 .6
174. Phaedra	11.6	1897 Oct. 6.0	129 24 10 .1	8 23 43 .8
175. Andromache	12.3	1900 Mai 24.0	359 9 23 .4	11 7 48 .8

n	$\log a$	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
814″.6615	0.4260 196	57°56′16″.5	209° 0′ 3″.4	315°42′46″.7	18°20′22″.0
943 .5246	0.3835 023	292 8 29 .1	183 0 55 .0	289 48 38 .3	3 49 23 .3
773 .3958	0.4410 699	254 6 47 .5	221 51 40 .2	328 34 23 .6	12 38 8 .6
819 .4849	0.4243 104	303 41 56 .1	317 15 22 .8	63 58 6 .2	3 31 3 .7
812 .2212	0.4268 915	44 27 12 .2	327 15 44 .3	73 58 27 .6	11 19 23 .7
791 .4186	0.4344 008	143 57 8 .7	334 40 14 .5	81 22 57 .8	11 38 5 .3
638 .8069	0.4964 247	106 42 10 .1	160 33 8 .2	267 15 51 .5	3 19 32 .1
769 .6223	0.4424 860	248 33 48 .6	40 39 41 .6	147 22 24 .9	22 13 42 .8
1105 .8897	0.3375 299	157 29 57 .0	144 10 26 .3	250 53 9 .6	1 15 0 .3
689 .2534	0.4744 18	114 10 6 .7	133 28 46 .1	240 11 29 .4	2 53 43 .1
850 .8980	0.4134 194	145 4 15 .5	278 12 33 .5	24 55 16 .8	6 3 3 .2
637 .2942	0.4971 111	49 46 23 .2	287 33 47 .4	34 16 30 .7	11 39 1 .6
449 .9321	0.5979 065	45 55 28 .2	130 24 43 .0	237 7 26 .3	8 47 52 .5
622 .4711	0.5039 249	165 31 9 .4	286 39 33 .1	33 22 16 .4	20 24 1 .8
713 .7875	0.4642 92	45 16 48	290 33 4	37 15 48	13 26 26
670 .230	0.4825 22	263 0 49 .3	146 30 10 .3	253 12 53 .6	8 44 52 .6
854 .8040	0.4120 934	49 42 5 .4	310 22 19 .7	57 5 3 .1	10 56 53 .0
730 .4848	0.4575 969	135 17 0 .9	177 47 18 .7	284 30 2 .0	2 34 58 .2
647 .4107	0.4925 51	322 44 0 .7	37 27 27 .2	144 10 10 .6	4 44 49 .6
787 .7290	0.4357 53	67 58 55 .6	241 25 33 .4	348 8 16 .7	4 21 13 .2
967 .0645	0.3763 675	301 50 19 .1	262 3 33 .5	8 46 16 .8	9 8 12 .1
676 .5719	0.4797 951	121 4 36 .1	276 27 45 .0	23 10 28 .3	5 41 54 .8
976 .7787	0.3734 736	277 9 27 .4	71 48 58 .8	178 31 42 .1	4 2 35 .5
831 .0764	0.4202 438	283 48 26 .2	329 5 5 .6	75 47 48 .9	23 2 0 .5
641 .1299	0.4953 737	344 39 15 .5	195 13 57 .8	301 56 41 .1	12 43 23 .9
806 .7683	0.4288 385	258 7 41 .8	26 5 36 .7	132 48 20 .0	10 35 18 .2
736 .5954	0.4551 851	76 21 40 .2	104 31 34 .6	211 14 18 .0	1 56 47 .8
571 .6864	0.5285 658	157 2 58 .9	119 52 39 .2	226 35 22 .5	5 10 59 .9
979 .6462	0.3726 249	345 45 48 .6	234 36 18 .0	341 19 1 .3	6 16 42 .4
869 .2225	0.4072 505	157 26 46 .9	193 15 49 .5	299 58 32 .8	15 54 21 .0
686 .3859	0.4975 241	59 41 40 .7	344 58 52 .9	91 41 36 .3	0 59 18 .8
965 .9899	0.3766 893	2 37 29 .5	219 37 25 .0	326 20 8 .3	11 12 22 .4
780 .8006	0.4383 110	219 58 40 .7	46 35 4 .3	153 17 47 .6	13 7 31 .9
784 .0156	0.4562 01	290 57 42 .1	217 27 48 .8	324 10 32 .1	13 19 44 .7
612 .3316	0.5086 799	329 40 48 .5	250 37 37 .7	357 20 21 .0	3 19 48 .1

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
176. Idunna	12.1	1900 Nov. 20.0	18°26′49″.8	10° 1′24″.6
177. Irma	12.4	1897 Jan. 19.0	71 42 48 .0	13 32 58 .0
178. Belisana	12.0	1900 Oct. 11.0	115 12 44 .4	2 28 36 .0
179. Klytæmnestra . .	11.5	1897 Oct. 6.0	14 32 37 .3	6 37 0 .0
180. Garumna	13.3	1899 Nov. 5.0	308 53 34 .6	9 46 17 .7
181. Eucharis	11.5	1887 Oct. 19.0	305 49 36 .6	12 40 26 .5
182. Elsa	11.0	1897 März 20.0	102 51 45 .1	10 50 51 .9
183. Istria	12.6	1900 Dec. 10.0	15 47 41 .4	20 19 26 .5
184. Dejapeja	12.4	1901 März 20.0	1 33 52 .9	3 24 23 .1
185. Eunike	10.4	1889 Aug. 29.0	328 8 9 .8	7 11 6 .0
186. Celuta	11.4	1897 Aug. 27.0	2 39 38 .6	8 41 21 .3
187. Lamberta . . .	11.4	1897 Aug. 27.0	94 42 30 .1	13 36 43 .5
188. Menippe	13.0	1897 Sept. 1.0	23 1 52 .2	10 15 28 .9
189. Phthia	11.5	1900 Mai 24.0	234 17 27 .2	2 4 18 .4
190. Ismene	12.0	1900 Juli 23.0	212 25 24 .5	9 33 57 .2
191. Kolga	12.0	1897 Juli 18.0	271 52 28 .4	5 13 5 .0
192. Nausikaa . . .	9.3	1888 Juli 25.0	324 20 18 .4	14 9 22 .7
193. Ambrosia . . .	12.2	1879 März 25.5	68 48 35 .8	16 34 52 .0
194. Prokne	10.5	1899 Jan. 29.0	130 9 24 .2	13 50 55 .7
195. Eurykleia . . .	12.3	1896 Nov. 20.0	289 6 35 .6	2 25 31 .5
196. Philomela . . .	10.3	1898 Nov. 10.0	81 59 4 .9	1 10 59 .6
197. Arete	12.7	1900 Jan. 24.0	134 40 9 .5	9 22 12 .5
198. Ampella	11.1	1901 Jan. 19.0	145 38 12 .0	13 6 24 .6
199. Byblis	12.4	1900 Jan. 4.0	227 27 1 .0	10 17 26 .5
200. Dynamene . . .	11.0	1889 Dec. 27.0	30 58 9 .6	7 42 34 .1
201. Penelope	11.9	1897 Nov. 15.0	53 1 14 .6	10 25 29 .0
202. Chryseïs	10.7	1896 Nov. 20.0	296 12 57 .2	5 51 45 .4
203. Pompeja	11.7	1899 Jan. 9.0	65 39 8 .5	3 28 23 .6
204. Kallisto	12.0	1888 Nov. 2.0	140 55 19 .4	9 51 34 .4
205. Martha	12.7	1886 Febr. 26.0	139 40 10 .2	1 54 54 .4
206. Hersilia	12.0	1887 Juni 21.0	184 57 36 .2	2 19 59 .5
207. Hedda	11.8	1898 Febr. 3.0	280 15 16 .2	1 39 3 .3
208. Lacrimosa . . .	12.1	1899 Nov. 25.0	315 23 43 .1	0 54 11 .9
209. Dido	11.6	1897 Dec. 25.0	222 33 3 .9	3 46 48 .0
210. Isabella	12.5	1897 Oct. 26.0	358 48 23 .3	7 6 30 .8

n	$\log a$	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
626″.2924	0.5021 529	178°32′ 55″.6	98° 3′ 48″.8	204°46′ 32″.2	22°51′ 29″.9
768 .8406	0.4427 802	66 14 3 .2	209 46 6 .7	316 28 50 .1	2 35 28 .9
918 .5627	0.3912 652	264 22 4 .7	252 0 46 .9	358 43 30 .2	1 39 32 .2
692 .8578	0.4729 08	95 0 9 .0	151 56 2 .7	258 38 46 .0	9 9 44 .4
790 .4612	0.4347 501	187 12 12 .0	189 59 42 .2	296 42 25 ,5	2 24 44 .1
643 .5438	0.4942 856	307 8 43 .2	41 24 15 .2	148 6 58 .6	17 22 21 .6
944 .5132	0.3831 990	308 21 40 .5	359 50 33 .9	106 33 17 .3	0 35 1 .0
760 .5455	0.4459 209	260 14 1 .0	88 5 12 .4	144 47 55 .7	25 10 11 .3
622 .6844	0.5038 304	232 22 32 .9	200 18 18 .8	307 1 2 .1	2 32 28 .7
782 .8646	0.4375 466	218 30 42 .2	50 2 52 .5	156 45 35 .8	22 11 27 .8
977 .5884	0.3732 337	320 29 32 .6	261 10 41 .6	7 53 24 .9	13 20 12 .5
785 .6152	0.4365 311	200 36 51 .0	257 6 13 .6	3 48 56 .9	10 39 9 .2
772 .712	0.4413 26	61 35 58 .6	139 59 2 .9	246 41 46 .2	12 54 54 .5
924 .2246	0.3894 861	149 31 47 .0	113 5 13 .2	219 47 56 .5	5 33 40 .1
455 .1028	0.5945 981	271 21 52 .5	85 5 34 .7	191 48 18 .0	5 47 49 .7
720 .0541	0.4617 609	217 26 50 .7	59 54 43 .9	166 37 27 .2	10 36 55 .0
952 .4502	0.3807 762	37 26 11 .3	227 1 19 .0	333 44 2 .3	7 50 34 .9
858 .2960	0.4109 13	86 18 49 .8	238 16 20 .4	344 59 3 .7	12 24 6 .8
839 .1447	0.4174 465	156 25 17 .9	56 37 48 .4	163 20 31 .7	17 29 2 .4
727 .0472	0.4589 627	130 20 27 .2	248 53 23 .9	355 36 7 .3	7 24 56 .0
645 .2604	0.4935 145	246 14 3 .6	318 19 57 .3	65 2 40 .6	6 1 17 .2
782 .6498	0.4376 327	248 36 39 .9	330 14 15 .6	76 56 58 .9	7 24 37 .8
920 .1134	0.3907 768	84 47 52 .8	164 23 8 .6	271 5 52 .0	10 49 59 .6
629 .4802	0.5006 831	173 57 47 .7	341 8 29 .3	87 51 12 .6	13 54 29 .7
783 .2093	0.4374 192	89 40 25 .2	211 49 16 .2	318 31 59 .5	8 12 32 .6
809 .8341	0.4277 403	162 9 10 .1	64 56 48 .4	171 39 31 .8	4 52 3 .0
659 .4551	0.4872 142	349 0 37 .1	37 16 10 .0	143 58 53 .3	7 30 39 .1
783 .8637	0.4371 774	73 17 0 .2	222 26 27 .5	329 9 10 .9	4 11 27 .7
812 .2343	0.4268 835	40 50 51 .3	109 30 15 .5	216 12 58 .9	8 40 48 .1
765 .9190	0.4438 825	164 15 51 .7	113 27 50 .5	220 10 33 .8	11 11 56 .7
782 .3554	0.4377 85	278 54 34 .1	60 10 31 .8	166 53 15 .1	2 42 31 .0
1027 .9888	0.3586 788	214 39 45 .2	258 16 57 .1	4 59 40 .5	3 48 32 .4
721 .0639	0.4613 553	142 18 49 .2	222 4 58 .3	328 47 41 .6	2 36 46 .5
636 .9545	0.4972 654	261 0 8 .3	244 0 15 .2	350 42 58 .6	7 47 44 .4
790 .0977	0.4348 838	27 42 44 .7	268 59 7 .3	15 41 50 .6	5 5 16 .8

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
211. Isolda	11.5	1895 Nov. 26.0	1°10′ 4″.0	9°15′38″.[illegible]
212. Medea	12.2	1899 Juli 28.0	276 2 57 .4	6 40 42 .[illegible]
213. Lilæa	11.7	1898 Febr. 23.0	229 20 37 .9	8 19 49 .[illegible]
214. Aschera	12.1	1897 April 9.0	71 25 59 .3	1 55 49 .[illegible]
215. Oenone	12.8	1891 Nov. 7.0	55 44 10 .3	2 1 15 .[illegible]
216. Kleopatra . . .	10.1	1886 Juni 26.0	277 9 56 .8	14 31 20 .7
217. Eudora	13.1	1889 Mai 1.0	296 55 48 .4	18 1 5 .2
218. Bianca	11.3	1889 Oct. 8.0	134 31 18 .9	6 40 5 .1
219. Thusnelda . . .	11.2	1889 Jan. 21.0	130 33 20 .7	12 54 38 .9
220. Stephania . . .	13.6	1887 Jan. 0.5	131 12 41 .6	14 53 43 .7
221. Eos	11.2	1889 Juni 30.0	322 54 24 .2	5 50 34 .9
222. Lucia	12.9	1898 Jan. 14.0	225 34 56 .4	8 27 39 .5
223. Rosa	13.3	1891 Dec. 17.0	333 11 14 .5	6 57 1 .2
224. Oceana	11.7	1890 Febr. 5.0	225 24 48 .8	2 25 51 .0
225. Henrietta . . .	12.7	1897 Dec. 5.0	107 58 34 .0	15 14 24 .5
226. Weringia . . .	13.0	1891 Aug. 19.0	30 52 14 .2	11 43 4 .3
227. Philosophia . . .	12.9	1896 Dec. 10.0	283 51 33 .6	12 2 39 .9
228. Agathe	14.5	1892 Nov. 21.5	49 45 10 .8	13 55 0 .2
229. Adelinda	13.5	1900 Juni 13.0	295 35 57 .4	8 16 3 .0
230. Athamantis . . .	10.3	1897 Oct. 26.0	11 22 17 .7	3 32 52 .8
231. Vindobona . . .	12.4	1898 Nov. 10.0	164 53 38 .2	8 56 36 .2
232. Russia	13.4	1898 Dec. 20.0	278 44 40 .1	9 52 51 .0
233. Asterope	11.3	1897 Aug. 27.0	353 18 46 .2	5 49 43 .8
234. Barbara	11.7	1898 Oct. 21.0	33 57 10 .0	14 7 1 .5
235. Carolina	12.2	1897 Sept. 16.0	73 32 29 .3	3 31 18 .9
236. Honoria	11.4	1890 Aug. 20.5	341 11 56 .1	10 54 45 .4
237. Cœlestina . . .	12.8	1897 März 20.0	258 3 0 .9	4 1 30 .3
238. Hypatia	11.7	1899 Sept. 26.0	327 11 49 .3	5 9 26 .4
239. Adrastea	14.2	1892 Febr. 15.0	128 25 5 .1	13 7 38 .0
240. Vanadis	12.5	1899 Febr. 18.0	63 55 57 .6	12 6 26 .6
241. Germania . . .	11.2	1900 Sept. 21.0	14 20 36 .0	5 26 42 .5
242. Kriemhild . . .	12.6	1889 Dec. 27.0	307 49 54 .4	7 5 15 .3
243. Ida	13.3	1899 Nov. 25.0	6 39 30 .9	2 42 32 .2
244. Sita	13.7	1900 Nov. 20.0	31 33 23 .4	7 53 3 .8
245. Vera	12.5	1897 März 20.0	141 1 15 .6	11 37 34 .3

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
568″.6041	0.4832 250	164°31′39″.0	164°46′31″.3	271°29′14″.6	5°22′29″.1
847 .3973	0.4925 571	108 51 47 .2	200 50 53 .0	307 33 36 .4	5 43 33 .0
777 .0010	0.4397 237	153 53 5 .0	20 25 49 .5	127 8 32 .9	5 15 58 .5
840 .5265	0.4169 701	144 54 17 .2	219 4 13 .8	325 46 57 .2	4 32 36 .5
771 .4078	0.4418 151	0 40 19 .2	232 4 10 .3	338 46 53 .7	2 9 30 .9
759 .7703	0.4462 182	169 50 40 .1	115 28 46 .4	222 11 29 .7	13 38 48 .8
730 .2884	0.4576 747	142 17 46 .2	65 25 43 .4	172 8 26 .7	9 30 53 .6
815 .0438	0.4258 837	53 21 0 .8	69 49 53 .6	176 32 36 .9	14 35 10 .9
982 .2924	0.3718 439	131 45 42 .7	102 23 1 .4	209 6 44 .8	11 1 8 .1
984 .634	0.3711 54	70 22 25 .5	156 43 31 .5	263 26 14 .8	9 0 6 .7
678 .2597	0.4790 737	181 46 39 .6	41 26 42 .6	148 9 26 .0	9 36 53 .6
641 .7676	0.4950 859	218 42 56 .2	290 47 47 .1	37 30 30 .5	1 2 4 .1
652 .9374	0.4900 900	108 22 51 .7	252 14 19 .1	358 57 2 .5	1 45 43 .1
824 .6755	0.4224 824	289 35 59 .1	234 12 48 .8	340 55 32 .1	6 39 30 .9
566 .6635	0.5311 21	93 32 55 .5	98 15 15 .0	204 57 58 .4	20 51 31 .0
793 .2109	0.4337 45	147 4 51 .2	31 45 33 .5	138 28 16 .8	14 27 21 .6
637 .0300	0.4972 311	260 37 19 .2	218 16 24 .8	324 59 8 .1	10 26 32 .2
1086 .2400	0.3427 205	26 18 32 .5	196 38 51 .9	303 21 35 .2	4 2 2 .2
560 .7202	0.5341 736	343 34 6 .8	243 8 22 .4	349 51 5 .7	2 20 36 .3
964 .9093	0.3770 134	130 53 7 .5	139 16 6 .6	245 58 50 .0	10 33 57 .4
711 .1049	0.4653 820	277 39 59 .2	231 36 0 .0	338 18 43 .3	5 58 13 .0
869 .2983	0.4072 251	35 21 50 .7	58 35 56 .8	165 18 40 .2	5 5 3 .9
817 .9445	0.4248 552	112 51 10 .2	125 27 45 .1	232 10 28 .4	8 27 47 .8
962 .6609	0.3776 889	186 9 19 .1	41 24 12 .8	148 6 56 .1	18 43 8 .8
725 .2712	0.4596 708	214 50 27 .4	312 29 49 .8	59 12 33 .1	7 55 13 .6
758 .1024	0.4468 53	158 27 28 .7	91 54 33 .2	198 37 16 .5	7 30 6 .1
771 .8775	0.4416 388	200 31 58 .5	333 49 1 .3	80 31 44 .6	8 18 55 .0
716 .0964	0.4633 567	199 42 46 .6	84 52 11 .1	191 34 54 .4	12 9 3 .5
691 .2906	0.4735 639	190 12 56 .7	89 54 9 .4	196 36 52 .8	5 55 2 .7
816 .6267	0.4253 220	274 10 15 .8	31 33 19 .9	138 16 3 .3	0 34 28 .0
665 .7416	0.4844 672	69 51 56 .8	168 32 5 .8	275 14 49 .1	7 3 27 .5
732 .9031	0.4566 401	266 47 7 .0	108 57 7 .7	215 39 51 .0	11 41 54 .8
733 .0664	0.4565 755	127 36 56 .7	196 27 21 .8	303 10 5 .1	2 35 7 .3
1106 .6015	0.3373 437	138 16 1 .8	128 6 9 .9	234 48 53 .2	3 31 1 .6
651 .4943	0.4907 307	341 41 43 .1	299 59 46 .9	46 42 30 .2	4 12 38 .3

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
246. Asporina	11.7	1890 Jan. 16.0	316°40′26″.7	6 2 43 .0
247. Eukrate	11.0	1900 Juni 13.0	224 37 55 .8	13 53 45 .9
248. Lameia	13.0	1900 März 25.0	293 0 27 .6	3 42 45 .7
249. Ilse	13.6	1896 Sept. 1.0	332 23 24 .0	12 28 25 .6
250. Bettina	11.7	1897 Nov. 15.0	332 5 23 .0	7 1 48 .1
251. Sophia	13.6	1900 Juni 13.0	177 35 1 .4	5 31 47 .2
252. Clementina	13.0	1899 Febr. 18.0	162 38 19 .3	4 27 58 .2
253. Mathilda	13.4	1898 Nov. 10.0	55 7 48 .0	15 26 37 .5
254. Augusta	13.4	1887 Juli 31.0	101 27 54 .0	6 58 7 .6
255. Oppavia	13.8	1889 März 2.0	267 18 9 .8	4 40 24 .1
256. Walpurga	13.2	1899 Nov. 5.0	187 50 13 .9	3 29 45 .6
257. Silesia	12.8	1898 Juni 3.0	212 13 25 .8	7 4 44 .5
258. Tyche	11.1	1899 Mai 29.0	267 50 31 .4	11 48 8 .5
259. Aletheia	12.1	1898 Sept. 11.0	85 40 51 .4	6 20 21 .0
260. Huberta	13.9	1900 Dec. 10.0	92 3 1 .9	7 7 16 .5
261. Prymno	11.9	1897 Nov. 15.0	275 46 18 .1	5 9 55 .6
262. Valda	14.1	1900 März 5.0	82 47 25 .5	12 17 17 .5
263. Dresda	13.3	1900 Aug. 12.0	309 25 24 .3	4 19 24 .9
264. Libussa	12.1	1894 Juni 4.0	224 30 49 .9	7 45 36 .5
265. Anna	13.8	1899 Aug. 17.0	67 23 25 .8	15 12 47 .2
266. Aline	11.7	1900 März 5.0	131 44 0 .5	9 9 53 .6
267. Tirza	14.0	1898 Dec. 20.0	167 41 8 .3	5 43 23 .8
268. Adorea	12.5	1897 Febr. 28.0	348 19 31 .1	7 54 36 .0
269. Justitia	12.7	1900 Oct. 31.0	91 35 3 .3	12 18 39 .7
270. Anahita	11.0	1900 Sept. 21.0	25 43 7 .7	8 37 15 .6
271. Penthesilea	12.8	1900 Febr. 13.0	128 29 24 .5	5 56 35 .1
272. Antonia	13.6	1899 Juli 28.0	208 59 58 .9	1 46 56 .3
273. Atropos	11.6	1888 März 9.5	261 20 1 .8	9 19 0 .4
274. Philagoria	13.6	1899 Mai 29.0	24 20 51 .9	7 14 43 .7
275. Sapientia	12.0	1897 Febr. 28.0	354 20 18 .0	9 30 47 .4
276. Adelheid	11.2	1899 Mai 9.0	82 21 36 .0	3 55 49 .0
277. Elvira	13.1	1899 Aug. 17.0	320 39 21 .3	5 6 55 .0
278. Paulina	12.7	1899 Nov. 5.0	218 13 40 .4	7 35 40 .4
279. Thule	13.8	1891 Febr. 20.0	155 36 48 .8	4 43 14 .2
280. Philia	14.4	1900 Febr. 13.0	39 45 20 .2	6 19 13 .9

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
802″.267	0.4304 584	88°55′37″.9	61° 1′37″.2	167°44′20″.5	14°47′57″.3
780 .9440	0.4382 578	57 4 49 .4	250 23 11 .7	357 5 55 .1	25 33 22 .2
913 .9068	0.3927 365	351 16 29 .2	150 57 18 .0	257 40 1 .3	5 19 44 .3
967 .8662	0.3761 275	45 34 38 .6	221 53 58 .8	328 36 42 .1	10 48 38 .4
633 .7875	0.4987 086	73 5 19 .8	271 59 12 .1	18 41 55 .4	12 47 18 .2
648 .5081	0.4920 608	280 3 48 .3	57 27 33 .2	164 10 16 .6	9 32 18 .6
633 .3155	0.4989 244	140 19 9 .5	105 13 9 .6	211 55 52 .9	10 19 13 .1
824 .4270	0.4225 696	139 53 41 .4	87 3 30 .6	193 46 14 .0	1 21 57 .5
1091 .0836	0.3414 323	251 4 17 .6	261 26 8 .9	8 8 52 .3	4 29 23 .9
780 .0705	0.4385 818	158 34 20 .1	258 12 51 .1	4 55 34 .5	9 42 30 .0
682 .1748	0.4774 078	36 17 29 .7	83 36 55 .3	190 19 38 .6	13 1 58 .7
646 .3454	0.4930 280	53 7 24 .1	263 19 26 .1	10 2 9 .4	3 29 53 .6
838 .4573	0.4176 838	146 30 1 .0	107 0 58 .6	213 43 42 .0	14 37 52 .0
635 .7631	0.4978 075	159 18 7 .9	338 44 46 .4	85 27 29 .8	9 6 11 .7
554 .7196	0.5372 887	149 50 49 .2	75 15 27 .5	181 58 10 .9	5 42 24 .7
996 .7804	0.3676 05	70 55 1 .6	341 50 20 .3	88 33 3 .6	2 6 2 .0
870 .5130	0.4068 209	34 11 32 .6	280 20 26 .8	27 3 10 .2	7 14 46 .6
723 .1695	0.4605 110	119 4 21 .0	149 37 1 .7	256 19 45 .0	2 22 9 .5
757 .4897	0.4470 87	344 30 21 .5	295 34 27 .5	42 17 10 .9	9 39 52 .1
941 .4296	0.3841 46	258 43 25 .3	226 19 46 .3	333 2 29 .7	26 47 17 .4
756 .4554	0.4474 822	143 5 23 .0	134 28 52 .0	241 11 35 .3	14 26 0 .3
767 .9409	0.4431 192	204 0 36 .4	217 2 16 .0	63 44 59 .4	4 45 59 .4
652 .1602	0.4904 349	34 3 52 .5	39 53 47 .8	146 36 31 .2	0 57 56 .9
838 .9442	0.4175 157	99 59 37 .4	66 14 10 .0	172 56 53 .3	4 35 43 .1
1089 .0147	0.3419 819	65 6 16 .3	160 39 18 .3	267 22 1 .6	3 47 54 .3
681 .3226	0.4777 693	65 9 1 .6	215 29 27 2	322 12 10 .6	4 44 55 .2
767 .2554	0.4433 777	86 18 22 .6	270 17 27 .7	17 0 11 .0	4 10 34 .4
955 .4037	0.3798 80	114 42 11 .5	55 48 25 .8	162 31 9 .1	19 28 10 .5
668 .8847	0.4831 036	125 4 49 .9	337 30 19 .9	84 13 3 .2	2 9 50 .3
769 .4963	0.4425 334	18 38 17 .3	40 39 30 .9	147 22 14 .3	8 25 49 .6
644 .0120	0.4940 751	269 49 0 .0	108 36 32 .0	215 19 15 .4	22 3 46 .1
723 .9561	0.4601 962	101 19 10 .7	158 3 47 .7	264 46 31 .1	2 26 2 .4
775 .5978	0.4402 467	144 56 7 .6	306 28 1 .1	53 10 44 .5	6 46 21 .4
403 .1860	0.6296 67	272 11 31 .2	289 59 51 .4	36 42 34 .8	1 18 30 .7
703 .8816	0.4683 380	92 43 59 .0	252 54 48 .4	359 37 31 .7	7 46 6 .5

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
281. Lucretia	13.6	1888 Nov. 2.5	353° 48′ 12″.3	7° 34′ 24″.3
282. Clorinde	13.3	1900 März 5.0	87 21 19 .9	4 38 46 .0
283. Emma	11.8	1900 März 5.0	167 25 20 .3	8 46 54 .2
284. Amalia	12.9	1900 Mai 24.0	333 47 12 .4	12 48 19 .0
285. Regina	14.9	1889 Aug. 19.5	357 36 27 .2	11 55 35 .4
286. Iclea	13.2	1900 Juli 23.0	271 4 52 .2	0 42 53 .1
287. Nephthys . . .	10.7	1899 April 19.0	311 52 37 .9	1 19 35 .4
288. Glauke	12.5	1900 Juli 3.0	59 1 1 .6	11 56 58 .4
289. Nenetta	12.5	1900 März 5.0	146 2 33 .0	11 54 3 .1
290. Bruna	13.9	1890 Mai 7.5	56 49 22 .1	15 4 22 .7
291. Alice	13.6	1900 Mai 24.0	89 46 41 .2	5 19 10 .3
292. Ludovica . . .	12.5	1899 Sept. 26.0	10 5 58 .6	1 36 45 .3
293. Brasilia	12.9	1890 Juni 17.5	92 28 41 .4	6 48 2 .9
294. Felicia	14.3	1890 Oct. 2.5	8 44 31 .0	14 30 22 .2
295. Theresia	13.5	1899 Juli 8.0	259 17 15 .9	9 48 43 .7
296. Phaëtusa	13.3	1890 Aug. 22.0	330 33 11 .7	9 6 25 .9
297. Cæcilia	13.3	1900 April 14.0	267 49 8 .0	8 9 7 .6
298. Baptistina . . .	13.5	1900 Sept. 1.0	202 6 1 .5	5 33 40 .8
299. Thora	14.5	1892 März 6.0	131 22 30 .1	3 29 56 .6
300. Geraldina . . .	13.9	1895 Juli 9.0	336 44 54 .3	2 26 41 .4
301. Bavaria	12.2	1901 Jan. 19.0	236 31 41 .8	3 36 13 .7
302. Clarissa	13.9	1897 Febr. 8.0	208 29 34 .2	6 26 28 .4
303. Josephina . . .	12.0	1899 Sept. 6.5	277 45 55 .3	3 53 41 .6
304. Olga	12.4	1900 Sept. 21.0	34 56 26 .5	12 47 10 .7
305. Gordonia . . .	12.5	1899 Juli 28.0	230 21 59 .4	11 31 48 .8
306. Unitas	10.7	1899 Juni 18.5	328 21 57 .6	8 39 29 .5
307. Nike	13.1	1891 März 8.5	74 34 39 .6	8 22 32 .2
308. Polyxo	11.0	1900 März 25.0	247 50 38 .3	2 15 25 .9
309. Fraternitas . . .	12.7	1891 Mai 11.5	239 5 58 .0	5 1 56 .0
310. Margarita . . .	13.5	1891 Juni 17.5	48 49 25 .4	6 31 55 .2
311. Claudia	13.0	1895 März 11.0	37 0 15 .1	0 43 21 .9
312. Pierretta	12.5	1891 Aug. 29.0	74 55 14 .0	9 9 55 .4
313. Chaldæa	10.3	1899 Nov. 25.0	314 36 54 .4	10 21 51 .6
314. Rosalia	14.0	1891 Dec. 3.5	17 47 52 .5	10 48 58 .3
315. Constantia . . .	14.0	1891 Sept. 4.5	9 27 44 .6	9 40 17 .9

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
1098″.5312	0.3394 628	32°32′ 49″.0	267°12′ 4″.1	13°54′ 47″.4	5° 9′ 47″.3
991 .8748	0.3690 332	286 24 18 .1	45 7 53 .7	151 50 37 .0	7 49 43 .4
668 .98929	0.4830 58	53 10 33 .5	195 55 47 .4	302 38 30 .7	9 33 15 .8
979 .2047	0.3727 55	47 29 58 .7	135 7 35 .3	241 50 18 .6	9 6 48 .3
661 .4827	0.4863 254	14 36 36 .6	203 26 32 .8	310 9 16 .1	18 43 33 .0
621 .2989	0.5044 707	233 19 34 .3	46 23 38 .7	153 6 22 .0	16 45 54 .5
982 .6631	0.3717 35	111 30 40 .9	41 19 56 .0	148 2 39 .3	8 46 40 .5
774 .1972	0.4407 70	72 43 59 .5	22 12 21 .1	128 55 4 .4	2 49 20 .1
729 .0809	0.4581 539	171 44 35 .6	89 36 53 .4	196 19 36 .8	6 27 20 .0
995 .1925	0.3680 66	107 40 32 .6	259 54 57 .2	6 37 40 .5	22 26 55 .8
1070 .8481	0.3468 53	275 25 7 .5	108 51 17 .4	215 34 0 .8	1 34 56 .2
881 .3701	0.4032 322	293 34 1 .0	290 46 46 .8	37 29 30 .1	14 14 6 .8
730 .8370	0.4574 574	86 45 49 .8	311 15 35 .4	57 58 18 .7	14 39 54 .6
639 .9696	0.4958 982	170 57 45 .6	39 36 11 .7	146 18 55 .0	4 56 41 .2
759 .2235	0.4464 247	140 7 1 .8	174 13 6 .8	280 55 50 .1	4 14 51 .8
1068 .122	0.3475 906	188 20 8 .1	75 54 22 .8	182 37 6 .1	0 26 32 .2
629 .7170	0.5005 74	354 22 28 .9	219 20 8 .3	326 2 51 .7	8 44 10 .6
1042 .0276	0.3547 517	145 54 40 .9	247 51 39 .2	354 34 22 .5	6 43 15 .7
934 .3006	0.3863 46	125 52 19 .2	157 31 56 .8	264 14 40 .1	2 56 3 .1
617 .2655	0.5063 564	9 1 10 .7	209 32 51 .7	316 15 35 .1	1 26 2 .5
788 .5213	0.4354 621	106 49 36 .7	50 13 47 .2	156 56 30 .6	3 42 30 .6
950 .0992	0.3814 918	75 18 54 .8	238 8 6 .6	344 50 50 .0	3 59 58 .5
643 .8778	0.4941 354	82 45 7 .8	228 40 56 .7	335 23 40 .0	7 51 31 .5
952 .3591	0.3808 039	164 55 10 .0	56 47 17 .1	163 30 0 .4	14 51 55 .5
654 .5373	0.4893 815	233 25 28 .1	122 0 36 .1	228 43 19 .4	5 2 54 .7
980 .0268	0.3725 126	156 38 15 .9	43 31 5 .5	150 13 48 .9	6 1 16 .1
716 .1102	0.4633 512	322 1 8 .3	353 10 57 .2	99 53 40 .6	4 32 15 .5
778 .5073	0.4391 627	89 52 42 .9	96 43 1 .8	203 25 45 .1	4 13 7 .0
831 .679	0.4200 34	350 49 33 .1	232 28 42 .6	339 11 26 .0	4 41 33 .4
775 .6563	0.4402 25	302 23 26 .2	142 7 54 .5	248 50 37 .8	4 11 41 .6
720 .425	0.4616 12	75 23 56 .3	313 57 5 .7	60 39 49 .0	1 57 32 .3
764 .051	0.4445 89	267 15 39 .3	251 26 34 .1	358 9 17 .4	9 28 27 .1
968 .4446	0.3759 545	305 24 4 .9	77 34 1 .2	184 16 44 .5	11 8 31 .6
635 .8075	0.4977 87	178 40 7 .1	71 25 6 .6	178 7 49 .9	11 57 56 .6
1057 .2646	0.3505 486	130 25 40 .7	95 26 30 .7	202 9 14 .0	1 58 16 .3

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
316. **Goberta**	13.3	1893 Jan. 0.0	11°29′ 4″.9	7°57′58″.6
317. **Roxane**	12.2	1900 Jan. 24.0	150 27 59 .6	4 53 26 .2
318. **Magdalena** . . .	13.2	1899 Jan. 9.0	0 5 58 .5	3 58 52 .5
319. **Leona**	14.2	1900 März 25.0	105 27 18 .9	12 13 59 .5
320. **Katharina** . . .	14.2	1891 Dec. 2.5	23 36 28 .6	6 41 30 .5
321. **Florentina** . . .	13.2	1900 Aug. 12.0	248 16 46 .3	2 39 26 .5
322. **Phaeo**	12.3	1900 Oct. 31.0	9 14 56 .4	14 19 32 .5
323. **Brucia**	13.0	1892 Jan. 1.5	43 0 42	15 57 36
324. **Bamberga** . . .	9.9	1899 Dec. 35.0	43 12 35 .7	19 45 58 .0
325. **Heidelberga** . .	12.4	1900 Juli 23.0	253 58 50 .1	9 3 0 .6
326. **Tamara**	11.1	1892 März 20.0	298 49 14 .0	10 48 17 .5
327. **Columbia** . . .	13.0	1892 Juni 17.5	277 51 46 .7	3 41 7 .4
328. **Gudrun**	12.3	1892 März 22.5	68 47 1 .5	6 53 58 .6
329. **Svea**	12.1	1900 April 14.0	351 50 59 .3	1 34 24 .1
330. **Adalberta** . . .	13.5	1892 März 20.5	181 3 42	0 0 0
331. **Etheridgea** . . .	12.5	1899 Oct. 16.0	14 52 12 .8	5 46 58 .8
332. **Siri**	12.6	1898 Aug. 22.0	352 29 7 .1	5 8 46 .8
333. **Badenia**	12.7	1900 März 5.0	108 25 4 .7	10 8 47 .8
334. **Chicago**	12.0	1897 März 11.5	185 10 37 .3	0 50 24 .0
335. **Roberta**	11.6	1900 Oct. 31.0	79 15 59 .4	10 15 32 .7
336. **Lacadiera** . . .	11.8	1899 Sept. 26.0	118 20 35 .1	5 26 36 .6
337. **Devosa**	11.4	1897 Jan. 4.5	351 48 50 .4	7 54 54 .5
338. **Budrosa**	12.1	1899 Jan. 9.0	72 15 37 .1	1 12 38 .1
339. **Dorothea** . . .	12.8	1900 März 5.0	182 47 13 .6	5 56 55 .6
340. **Eduarda**	12.9	1895 Jan. 10.0	132 50 1 .5	6 53 2 .5
341. **California** . . .	13.1	1893 Juni 29.0	113 18 39 .3	11 8 58 .9
342. **Endymion** . . .	12.8	1896 Oct. 11.0	298 5 33 .0	7 20 44 .1
343. **Ostara**	13.5	1899 Aug. 17.0	297 5 28 .6	13 26 8 .3
344. **Desiderata** . . .	11.7	1900 Sept. 21.0	40 22 44 .1	18 8 53 .1
345. **Tercidina** . . .	11.2	1899 Nov. 5.0	319 52 4 .6	3 33 5 .7
346. **Hermentaria** . .	11.5	1899 März 1.0	156 0 38 .3	5 47 46 .6
347. **Pariana**	12.0	1899 Juli 8.5	114 13 11 .1	9 34 55 .9
348. **May**	12.9	1893 Jan. 16.5	342 45 57 .1	3 45 27 .2
349. **Dembowska** . . .	9.8	1895 Mai 10.0	229 5 49 .2	5 9 33 .0
350. **Ornamenta** . . .	12.7	1900 April 14.0	130 20 41 .9	9 4 16 .8

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
627″.7382	0.5015 85	276°13′20″.2	49° 3′45″.8	155°46′29″.1	0°56′ 9″.2
1026 .4017	0.3591 262	124 27 21 .2	104 52 41 .3	211 35 24 .6	1 15 45 .0
618 .1074	0.5059 62	265 43 52 .8	63 50 56 .8	170 33 39 .6	9 44 2 .1
566 .8381	0.5810 317	207 46 52 .1	90 43 49 .5	197 26 32 .9	10 40 7 .4
678 .726	0.4788 75	134 37 32 .7	122 31 8 .4	229 13 51 .7	10 4 45 .2
723 .7382	0.4602 83	69 30 44 .5	257 49 16 .9	4 32 0 .3	2 27 17 .8
764 .6297	0.4443 703	105 36 24 .4	152 16 5 .3	258 58 48 .6	9 21 0 .8
1119 .60	0.3339 60	293 9 41	349 38 7	96 20 51	17 47 9
807 .7841	0.4284 742	45 20 15 .1	217 28 14 .2	324 10 57 .5	12 31 20 .7
616 .8237	0.5065 637	82 27 28 .4	230 25 10 .9	337 7 54 .2	9 28 57 .6
1005 .7638	0.3650 07	240 48 33 .7	281 46 22 .9	28 29 6 .3	23 25 1 .3
765 .613	0.4439 98	312 17 6 .1	238 2 16 .5	344 44 59 .8	7 51 54 .2
647 .507	0.4925 08	107 55 58 .7	241 41 30 .2	348 24 13 .6	16 49 48 .4
911 .3780	0.3935 387	34 22 28 .8	77 4 49 .8	183 47 33 .1	15 35 3 .7
1174 .9	0.3200 0	$\sigma = -4°18'42''$	248 7 49	355 50 33	20 40 0
673 .3904	0.4811 597	349 7 0 .0	261 25 56 .3	8 8 39 .6	6 9 23 .8
768 .4746	0.4429 180	327 40 39 .2	253 22 54 .5	0 5 37 .9	2 53 44 .5
645 .0495	0.4936 090	33 46 34 .0	230 7 39 .1	336 50 22 .4	4 39 39 .7
459 .742	0.5916 61	221 47 27 .7	40 23 22 .9	147 6 6 .2	3 18 40 .6
911 .5556	0.3934 828	125 35 40 .1	56 6 56 .6	162 49 40 .0	4 2 28 .8
1050 .0039	0.3525 488	18 4 36 .0	138 48 19 .4	245 31 2 .7	6 44 26 .4
964 .527	0.3771 27	105 57 43 .9	238 58 31 .7	345 41 15 .0	8 34 0 .6
713 .531	0.4643 96	106 54 16 .4	181 25 46 .5	288 8 29 .8	7 37 46 .9
680 .5669	0.4780 905	147 41 48 .2	76 34 56 .4	183 17 39 .8	9 24 19 .8
778 .0224	0.4393 43	57 57 47 .1	261 30 50 .5	8 13 33 .8	4 40 29 .3
1088 .2433	0.3421 871	308 0 46 .5	266 8 30 .2	12 51 13 .6	5 33 7 .5
861 .7771	0.4097 412	213 51 51 .9	134 58 43 .8	241 41 27 .1	8 22 8 .6
948 .2347	0.3820 605	35 45 26 .7	263 26 56 .2	10 9 39 .5	3 5 5 .4
847 .9673	0.4144 183	237 46 20 .4	298 9 6 .2	44 51 49 .5	17 50 47 .7
1000 .5696	0.3665 062	219 17 43 .6	114 14 5 .6	220 56 48 .9	10 16 57 .5
758 .5325	0.4466 88	290 13 17 .2	342 36 22 .4	89 19 5 .8	7 13 47 .0
840 .8521	0.4168 58	86 29 55 .0	336 8 51 .2	82 51 34 .5	10 14 15 .3
695 .387	0.4718 54	5 31 53 .5	340 55 38 .2	87 38 21 .6	8 13 31 .6
709 .497	0.4660 38	351 39 32 .4	175 25 11 .7	282 7 55 .0	7 58 35 .5
645 .8891	0.4932 324	331 30 54 .9	342 56 34 .1	89 39 17 .5	28 17 20 .4

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
351. Yrsa	12.2	1892 Dec. 20.5	330°42′48″.8	8°45′46″.5
352. Gisela	12.1	1898 Febr. 3.0	272 5 26 .1	8 33 45 .0
353. (1893 F)	14.2	1893 Febr. 22.5	44 13 13 .5	18 49 43 .3
354. Eleonora	10.0	1894 Mai 14.5	81 5 20 .5	6 31 10 .4
355. Gabriella . . .	13.1	1893 Febr. 23.5	37 15 11 .6	6 12 55 .9
356. (1893 G)	11.9	1900 Aug. 12.0	271 36 54 .7	13 57 5 .4
357. (1893 J)	12.2	1893 Febr. 15.5	138 27 1 .7	1 31 16 .0
358. (1893 K)	12.5	1893 März 3.5	86 52 43 .5	8 26 24 .1
359. (1893 M)	13.0	1893 März 17.5	163 43 16	0 0 0
360. (1893 N)	11.9	1893 März 12.5	92 54 10 .8	9 43 35 .9
361. (1893 P)	13.3	1893 März 12.5	53 40 44 .9	11 47 42 .4
362. (1893 R)	11.1	1898 Aug. 22.0	228 31 14 .1	2 44 25 .7
363. (1893 S)	11.6	1899 Juli 8.0	302 30 49 .4	4 1 11 .6
364. (1893 T)	11.7	1897 Juni 8.0	203 39 20 .5	8 43 13 .7
365. (1893 V)	12.2	1899 Aug. 17.0	268 1 48 .6	8 19 48 .5
366. Vincentina . . .	12.3	1900 Aug. 12.5	8 31 40 .2	3 29 35 .4
367. (1893 A A) . . .	12.5	1897 Aug. 27.0	198 37 34 .8	5 24 23 .5
368. (1893 A B) . . .	13.5	1893 Juli 17.5	317 18 49 .4	11 8 13 .1
369. Aëria	12.9	1899 März 10.0	34 2 38 .3	5 36 57 .7
370. (1893 A C) . . .	12.8	1893 Juli 14.5	312 26 36 .5	5 10 55 .7
371. (1893 A D) . . .	11.8	1899 Dec. 15.0	182 59 26 .0	3 28 34 .2
372. (1893 A H) . . .	10.5	1899 Sept. 26.0	322 8 11 .8	15 37 54 .9
373. (1893 A J) . . .	12.8	1899 April 20.0	8 16 34 .1	8 23 2 .8
374. (1893 A K) . . .	11.7	1896 Sept. 1.0	342 39 36 .2	4 27 27 .6
375. (1893 A L) . . .	11.0	1897 Mai 19.0	276 40 52 .5	5 37 56 .4
376. (1893 A M) . . .	11.8	1899 März 10.0	299 55 37 .2	9 51 15 .3
377. (1893 A N) . . .	11.5	1893 Oct. 7.5	338 6 43 .1	4 26 14 .5
378. (1893 A P) . . .	12.6	1900 April 14.0	168 50 19 .7	7 30 14 .0
379. (1894 A Q) . . .	12.6	1894 Jan. 12.5	98 29 53 .4	11 3 4 .0
380. (1894 A R) . . .	12.6	1894 Jan. 11.0	129 17 7 .6	6 37 54 .9
381. (1894 A S) . . .	12.4	1900 Jan. 24.0	238 54 53 .5	7 6 18 .4
382. (1894 A T) . . .	12.1	1898 Dec. 20.0	244 45 7 .1	9 52 38 .6
383. (1894 A U) . . .	13.3	1900 März 25.0	103 4 8 .0	10 19 59 .5
384. Burdigala . . .	11.7	1899 April 9.5	119 46 59 .6	8 22 34 .3
385. Ilmatar	10.3	1897 Dec. 25.5	281 17 34 .4	7 30 32 .1

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
771″.582	0.4417 50	29°36′ 37″.7	351°30′ 39″.5	98°13′ 22″.9	7°38′ 45″.4
1091 .4985	0.3413 223	129 56 1 .8	152 49 45 .8	259 32 29 .1	4 41 52 .0
794 .611	0.4332 34	319 56 4 .6	354 57 2 .1	101 39 45 .5	3 57 27 .6
757 .5785	0.4470 526	1 45 47 .2	36 52 22 .1	143 35 5 .4	17 4 39 .9
876 .580	0.4048 10	110 38 35 .0	229 26 24 .3	336 9 7 .6	5 12 43 .5
775 .7399	0.4401 987	84 14 35 .3	239 57 21 .9	346 40 5 .3	8 56 49 .1
632 .836	0.4991 42	228 6 27 .3	35 12 20 .2	141 55 3 .5	12 46 2 .1
725 .563	0.4595 54	221 38 28 .0	92 54 56 .7	199 37 40 .0	3 14 10 .1
760 .70	0.4458 6	$\sigma = -17°0′ 13″$	246 54 8	353 36 51	5 23 59
681 .803	0.4775 65	279 59 39 .6	30 58 43 .0	137 41 26 .4	10 14 52 .5
449 .924	0.5979 11	82 27 39 .2	265 44 23 .3	12 27 6 .6	12 38 6 .5
857 .2968	0.4112 50	42 46 40 .3	269 21 46 .4	16 4 29 .7	7 56 31 .7
779 .324	0.4388 59	305 41 12 .1	305 54 17 .0	52 37 0 .3	4 53 52 .1
1072 .6673	0.3463 61	311 25 15 .8	357 58 1 .5	104 40 44 .8	4 24 54 .0
756 .0685	0.4476 303	202 32 50 .8	86 5 25 .4	192 48 8 .7	12 31 11 .6
636 .6377	0.4974 09	321 12 8 .6	234 15 26 .1	340 58 9 .4	11 26 24 .1
1073 .2216	0.3462 11	76 20 18 .0	313 14 37 .3	59 57 20 .7	1 37 28 .2
663 .984	0.4852 31	76 23 52 .5	131 54 19 .8	238 37 3 .1	8 46 28 .5
824 .0037	0.4227 183	268 48 0 .8	346 1 16 .9	92 44 0 .8	11 11 1 .3
1001 .5535	0.3662 22	67 6 0 .4	183 34 11 .9	290 16 55 .2	9 26 34 .5
787 .7337	0.4357 52	339 14 46 .7	177 52 48 .5	284 35 31 .8	8 58 11 .9
636 .6860	0.4973 88	116 13 54 .0	219 20 22 .2	326 3 5 .5	24 52 43 .1
644 .9956	0.4936 333	354 18 42 .4	252 16 1 .9	358 58 45 .3	15 52 21 .5
765 .4424	0.4440 63	14 15 11 .9	121 29 42 .3	228 12 25 .7	9 41 34 .8
641 .2112	0.4960 04	348 45 26 .8	226 36 19 .3	333 19 2 .6	17 0 17 .4
1024 .4027	0.3596 906	317 21 53 .2	192 1 27 .1	298 44 10 .4	6 57 47 .4
804 .920	0.4295 03	180 18 1 .9	116 9 58 .9	222 52 42 .2	7 12 28 .5
767 .2482	0.4433 805	143 47 57 .8	135 36 24 .0	242 19 7 .4	8 1 21 .2
641 .338	0.4952 80	121 36 18 .6	122 22 1 .9	229 4 45 .2	1 44 28 .2
809 .990	0.4276 85	241 26 20 .0	344 39 55 .0	91 22 38 .3	4 37 50 .8
619 .6807	0.5052 257	142 11 19 .4	21 11 13 .2	127 53 56 .5	10 53 16 .4
646 .1972	0.4930 944	273 19 52 .6	204 4 30 .2	310 47 13 .5	8 50 50 .7
642 .0203	0.4949 719	332 21 25 .1	328 36 52 .6	75 19 36 .0	1 10 22 .8
820 .6462	0.4239 00	46 14 38 .4	285 53 9 .9	32 35 53 .3	5 0 17 .9
740 .0320	0.4538 37	190 34 23 .2	233 1 44 .3	339 44 27 .7	14 36 43 .3

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
386. (1894 A Y) . . .	10.5	1900 Mai 24.0	223°23′ 19″.9	9°35′ 59″.2
387. Aqvitania . . .	9.8	1895 Juli 3.5	353 6 10 .2	13 47 16 .3
388. (1894 B A) . . .	11.7	1894 Mai 6.5	200 48 45 .6	3 42 53 .8
389. (1894 B B) . . .	11.1	1899 Juni 18.0	63 27 27 .4	3 53 14 .7
390. (1894 B C) . . .	13.5	1899 Mai 17.0	88 15 19 .6	7 28 40 .3
391. Ingeborg . . .	13.4	1894 Nov. 6.0	23 31 40 .5	17 57 30 .4
392. Wilhelmina . . .	12.2	1894 Nov. 4.5	42 10 20 .6	11 12 8 .1
393. (1894 B G) . . .	11.0	1894 Nov. 4.5	67 32 29 .0	19 13 37 .7
394. (1894 B H) . . .	13.0	1894 Nov. 23.5	55 25 12 .3	13 11 32 .3
395. (1894 B K) . . .	13.0	1894 Dec. 3.5	136 43 41 .3	7 16 9 .6
396. (1894 B L) . . .	13.2	1894 Dec. 2.5	156 42 32 .8	10 18 30 .4
397. (1894 B M) . . .	12.6	1897 Mai 19.0	256 0 43 .9	14 23 4 .1
398. (1894 B N) . . .	12.0	1895 Jan. 22.5	187 25 12	0 0 0
399. (1895 B P) . . .	13.0	1895 März 1.5	353 57 41 .1	3 51 5 .6
400. (1895 B U) . . .	14.5	1895 März 18.5	337 44 19 .1	5 15 50 .9
401. Ottilia	12.6	1895 April 20.0	324 31 46 .8	2 18 50 .3
402. (1895 B W) . . .	10.7	1895 März 27.5	28 44 8 .7	6 24 49 .0
403. (1895 B X) . . .	12.0	1900 Juli 3.0	127 14 7 .2	5 42 4 .0
404. (1895 B Y) . . .	13.0	1899 Mai 29.0	17 28 20 .0	11 53 30 .4
405. (1895 B Z) . . .	11.0	1895 Juli 27.0	73 36 35 .0	14 32 24 .7
406. (1895 C B) . . .	13.5	1895 Aug. 23.5	350 1 59 .3	10 31 6 .1
407. (1895 C C) . . .	11.9	1895 Nov. 10.5	17 44 21 .6	3 55 13 .1
408. (1895 C D) . . .	13.4	1895 Oct. 15.5	354 28 32 .9	7 54 31 .1
409. (1895 C E) . . .	10.7	1899 Nov. 19.0	183 45 6 .5	3 53 20 .9
410. (1896 C H) . . .	11.9	1896 Jan. 8.5	245 34 9 .5	12 30 4 .9
411. (1896 C J) . . .	12.5	1896 Jan. 8.5	158 42 57 .5	13 36 34 .4
412. Elisabetha . . .	12.1	1899 Nov. 5.0	213 52 9 .2	2 16 3 .5
413. Edburga	12.2	1896 Jan. 10.5	72 21 21 .0	19 43 23 .0
414. (1896 C N) . . .	13.4	1896 Jan. 17.5	59 10 8 .5	5 18 49 .6
415. (1896 CO) . . .	11.6	1899 Oct. 4.5	332 37 13 .1	17 34 0 .7
416. Vaticana	11.5	1900 Jan. 24.5	262 34 31 .7	12 34 55 .2
417. (1896 C T) . . .	12.7	1896 Mai 11.5	30 48 55 .3	7 43 44 .5
418. (1896 C V) . . .	12.6	1896 Sept. 3.5	337 51 7 .9	6 57 51 .8
419. (1896 C W) . . .	11.1	1900 Aug. 12.0	29 39 37 .8	14 47 31 .2
420. Bertholda . . .	12.3	1900 April 14.0	104 51 47 .9	2 46 42 .3

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
718″.3236	0.4624 58	212°34′ 0″.5	64°20′ 11″.7	171° 2′ 55″.0	19°30′ 52″.2
782 .6076	0.4376 414	151 18 19 .9	23 54 40 .5	130 37 23 .8	16 30 15 .1
684 .531	0.4764 09	348 42 16 .0	237 5 5 .6	343 47 48 .9	7 15 20 .0
842 .4772	0.4162 99	262 10 36 .6	176 34 50 .3	283 17 33 .6	9 42 5 .1
821 .022	0.4237 68	190 40 44 .3	196 36 45 .7	303 19 29 .0	13 39 34 .5
1003 .286	0.3657 21	141 29 45 .2	109 28 40 .5	216 11 23 .8	23 32 2 .1
683 .267	0.4769 44	129 32 8 .8	110 32 13 .4	217 14 56 .8	16 40 57 .9
768 .335	0.4429 71	79 58 28 .8	113 46 53 .6	220 29 36 .9	15 26 42 .5
771 .095	0.4419 33	276 46 22 .0	310 25 34 .3	57 8 17 .6	5 6 53 .4
764 .391	0.4444 61	12 24 57 .6	161 23 29 .2	268 6 12 .6	4 59 42 .7
782 .986	0.4375 01	5 27 4 .4	157 45 11 .4	264 27 54 .7	4 1 46 .6
830 .1664	0.4205 60	130 49 46 .4	127 28 11 .3	234 10 54 .6	13 38 10 .0
684 .68	0.4763 4	$\sigma = -0°10'46''$	177 45 56	284 28 39	21 45 3
664 .6683	0.4849 35	186 33 6 .2	235 5 56 .1	341 48 39 .5	13 58 59 .3
641 .871	0.4950 39	225 37 57 .4	216 53 45 .7	323 36 29 .0	11 50 25 .9
584 .254	0.5222 70	196 19 14 .9	277 30 59 .7	24 13 43 .0	5 40 48 .6
868 .759	0.4074 05	9 1 10 .1	26 12 23 .1	132 55 6 .4	10 23 31 .7
752 .51263	0.4489 95	242 46 38 .2	144 41 40 .7	251 24 24 .0	10 23 6 .9
851 .5022	0.4132 14	119 52 33 .1	344 24 53 .3	91 7 36 .7	12 30 6 .3
856 .814	0.4114 12	301 39 46 .6	152 44 49 .5	259 27 32 .9	13 11 35 .3
714 .568	0.4639 75	41 46 1 .4	202 20 22 .9	309 3 6 .2	5 37 57 .5
834 .430	0.4190 78	81 6 8 .9	186 59 39 .3	293 42 22 .7	9 6 44 .4
627 .210	0.5017 29	102 30 45 .6	190 54 15 .1	297 36 58 .4	10 39 20 .7
858 .5857	0.4108 15	345 59 38 .0	140 55 29 .4	247 38 9 .7	12 24 0 .5
746 .590	0.4512 88	145 55 8 .7	347 41 17 .8	94 24 1 .1	7 50 36 .1
720 .585	0.4615 48	193 58 15 .7	1 32 25 .4	108 15 8 .8	17 51 18 .9
772 .41065	0.4414 39	88 31 37 .0	0 1 9 .1	106 43 52 .5	12 12 12 .0
856 .555	0.4115 01	249 1 37 .2	358 13 3 .7	104 55 47 .1	17 17 19 .2
537 .766	0.5462 75	300 28 16 .1	8 5 13 .0	114 47 56 .4	8 4 45 .0
761 .2267	0.4456 62	288 30 26 .2	26 30 3 .6	133 12 46 .9	6 39 27 .7
761 .14731	0.4456 92	201 21 47 .2	306 14 22 .0	52 57 5 .3	11 55 47 .9
757 .116	0.4472 29	330 59 49 .9	106 36 41 .5	213 19 24 .8	6 51 8 .9
847 .266	0.4146 58	116 58 35 .5	149 12 36 .3	255 55 19 .6	8 7 7 .9
850 .7095	0.4134 836	23 48 13 .0	138 47 5 .1	245 29 48 .4	5 0 48 .9
562 .7012	0.5331 525	195 46 59 .8	147 35 26 .6	254 18 10 .0	7 57 0 .4

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ
421. Zäringhia . . .	14.2	1896 Sept. 3.5	333° 0′ 19″.7	16° 53′ 29″.6
422. Berolina	13.4	1896 Dec. 4.5	42 36 47 .9	12 11 29 .9
423. (1896 D B) . . .	11.2	1896 Dec. 8.5	144 40 21 .6	2 17 42 .4
424. (1896 D F) . . .	12.8	1897 Febr. 28.0	46 56 47 .2	6 11 49 .6
425. (1896 D C) . . .	13.1	1897 Jan. 20.5	297 57 5 .8	4 18 21 .8
426. (1897 D H) . . .	11.5	1897 Sept. 30.0	172 10 55 .2	5 53 54 .4
427. (1897 D J) . . .	13.1	1897 Sept. 2.5	26 0 44 .7	6 53 23 .4
428. Monachia . . .	13.5	1900 Aug. 7.5	300 39 10 .6	10 15 44 .4
429. (1897 D L) . . .	11.5	1897 Nov. 24.5	39 2 43 .0	8 24 13 .0
430. (1897 D M) . . .	13.2	1898 Jan. 21.5	15 12 12 .0	14 55 51 .9
431. (1897 D N) . . .	12.6	1898 Jan. 18.5	97 29 58 .4	9 43 27 .5
432. (1897 D O) . . .	11.3	1898 Jan. 22.5	184 17 44 .4	8 27 55 .6
433. Eros	9.7	1900 Oct. 31.5	304 23 59 .7	12 52 48 .2
434. Hungaria . . .	11.8	1898 Oct. 10.5	58 46 13 .8	4 14 43 .5
435. (1898 D S) . . .	12.1	1898 Sept. 15.5	359 41 7 .1	8 56 51 .1
436. (1898 D T) . . .	12.4	1898 Sept. 20.5	342 35 23 .5	4 41 35 .9
437. (1898 D P) . . .	12.7	1898 Juli 18.5	346 24 55 .7	14 13 8 .7
438. (1898 D U) . . .	12.3	1898 Nov. 12.5	294 43 28 .7	9 22 43 .2
439. Ohio	11.7	1898 Oct. 14.5	310 47 3 .7	4 19 19 .9
440. (1898 E C) . . .	13.1	1898 Oct. 18.5	284 37 41 .8	6 11 19 .0
441. (1898 E D) . . .	—	1898 Dec. 9.5	339 42 50 .8	5 4 14 .4
442. (1899 E E) . . .	—	1899 März 30.5	308 39 24 .9	4 8 45 .9
443. (1899 E F) . . .	—	1899 März 31.5	327 53 6 .6	6 22 43 .6
444. (1899 E L) . . .	—	1899 März 31.5	207 21 24 .3	10 31 41 .6
(1894 B D) . . .	13.3	1894 Nov. 1.5	337 18 8 .4	8 33 50 .4
(1899 E R) . . .	—	1899 Oct. 29.5	53 14 31 .1	6 41 22 .3
(1899 E X) . . .	—	1899 Oct. 4.5	2 43 11 .7	11 50 32 .5
(1899 E S) . . .	—	1899 Dec. 3.5	4 21 31 .8	2 36 37 .5
(1899 E U) . . .	—	1899 Nov. 2.5	276 13 25 .7	9 59 28 .5
1892 S	13.0	1892 Dec. 17.5	77 35 50	0 0 0
1893 C	13.5	1893 Jan. 23.5	167 48 0	0 0 0
1893 D	12.5	1893 Jan. 19.5	348 50 15	0 0 0
1893 U	13.0	1893 April 10.5	93 23 42	0 0 0
1893 X	13	1893 März 21.5	112 50 17	0 0 0

n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
876″.838	0.4047 25	193°34′14″.2	92°49′48″.7	199°32′32″.1	7°46′42″.4
1070 .3195	0.3469 954	350 58 4 .5	245 19 29 .5	352 2 12 .8	5 25 43 .8
663 .033	0.4856 47	204 40 15 .3	318 16 38 .5	64 59 21 .8	9 59 36 .1
767 .6789	0.4432 180	332 4 29 .3	351 8 42 .7	97 51 26 .0	6 37 41 .6
719 .978	0.4617 92	138 58 34 .1	293 25 58 .9	40 8 42 .3	3 8 11 .8
722 .4562	0.4607 967	223 38 52 .0	203 29 43 .9	310 12 27 .3	21 4 20 .9
692 .493	0.4730 61	8 47 1 .0	189 15 23 .4	295 58 6 .8	6 41 44 .8
1009 .005	0.3640 76	28 13 20 .2	256 22 7 .0	3 4 50 .3	6 24 19 .1
846 .714	0.4148 45	136 24 58 .7	121 45 36 .5	228 28 19 .9	10 32 54 .1
743 .475	0.4524 94	171 27 40 .7	146 30 31 .9	253 13 15 .2	15 51 11 .6
642 .4286	0.4947 88	161 12 8 .6	58 34 19 .2	165 17 2 .6	0 23 6 .7
975 .178	0.3739 48	173 39 30 .5	339 16 52 .8	85 59 36 .2	10 36 53 .9
2015 .12740	0.1638 027	179 47 15 .6	194 41 59 .8	301 24 43 .1	12 21 15 .4
1306 .439	0.2892 78	119 14 37 .5	71 34 48 .4	178 17 31 .7	22 0 41 .0
926 .096	0.3889 00	14 12 53 .6	282 55 57 .3	339 38 40 .6	2 17 26 .9
622 .111	0.5040 93	31 1 54 .6	241 12 41 .0	347 55 24 .3	19 20 37 .7
963 .993	0.3772 88	54 26 15 .2	160 57 30 .2	267 40 13 .5	8 52 26 .5
792 .554	0.3839 85	93 37 40 .8	289 32 53 .4	36 15 36 .7	5 43 21 .2
637 .631	0.4969 58	228 12 10 .7	100 12 50 .7	206 55 34 .0	19 26 39 .8
1079 .355	0.3445 62	178 57 0 .9	182 49 30 .6	289 32 13 .9	3 10 42 .5
751 .537	0.4493 70	198 52 39 .2	152 38 12 .0	259 20 55 .3	9 25 6 .7
986 .875	0.3704 96	73 22 49 .2	37 1 3 .3	148 43 46 .6	4 42 59 .5
1034 .79	0.3567 74	5 47 17 .7	92 56 9 .6	199 38 52 .9	3 42 22 .6
775 .011	0.4404 66	150 26 4 .9	97 54 10 .0	204 36 53 .4	10 41 47 .5
1104 .735	0.3378 32	19 8 9 .4	303 25 47 .2	50 8 30 .5	2 19 36 .7
761 .6344	0.4455 06	288 53 23 .2	287 47 44 .7	34 30 28 .1	10 0 57 .4
623 .873	0.5032 74	80 3 56 .5	186 3 30 .2	292 46 13 .6	22 59 36 .6
687 .012	0.4753 62	333 34 31 .0	311 19 55 .2	58 2 38 .6	3 37 45 .9
869 .056	0.4073 06	64 18 38 .9	319 41 24 .6	66 24 8 .0	1 43 45 .1
835 .80	0.4186 0	$\sigma =$ 20°49′34″	230 44 45	337 27 28	4 14 4
1182 .9	0.3180 4	$\sigma =$ −10 33 54	204 19 6	311 1 49	4 56 58
681 .61	0.4776 4	$\sigma =$ 3 58 25	30 37 52	137 20 36	10 20 59
944 .3	0.3833 0	$\sigma =$ − 4 21 45	338 2 51	84 45 34	6 19 29
423 .40	0.6155 0	$\sigma =$ −73 53 25	251 46 15	358 28 58	0 55 53

Nummer und Name	m_0	Epoche und Osculation	M	φ	n	log a	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
1893 Y . .	13	1893 April 17.5	79° 39′ 46″	0° 0′ 0″	549″.95	0.5398 0	$\sigma =$ 158° 20′ 8″	175° 59′ 17″	282° 42′ 0″	1° 18′ 10″
1894 A W .	12	1894 Febr. 3.5	62 6 12	0 0 0	996 .0	0.3678 1	$\sigma = -$ 19 40 42	255 24 41	2 7 24	4 41 48
1896 C U . .	12.0	1896 Sept. 3.5	100 46 25	0 0 0	692. 17	0.4682 0	$\sigma =$ 8 44 4	145 55 7	252 37 50	7 6 31
1896 D D .	13.0	1897 Jan. 12.5	8 18 14	0 0 0	731 .37	0.4572 5	$\sigma = -$ 2 23 1	355 40 45	102 23 28	1 17 23
1896 D E . .	13.0	1897 Jan. 12.5	178 29 24	0 0 0	645 .96	0.4932 0	$\sigma = -$ 1 15 10	187 30 9	294 12 52	11 5 6
1898 D W .	13.5	1898 Nov. 19.5	181 1 17	0 0 0	841 .15	0.4167 5	$\sigma =$ 4 58 55	127 19 29	234 2 13	15 35 29
1898 D Y .	13.5	1898 Nov. 13.5	198 18 19	0 0 0	673 .12	0.4812 8	$\sigma =$ 21 22 21	131 25 14	238 7 58	4 5 26
1898 D Z . .	12.5	1898 Nov. 17.5	174 26 37	0 0 0	881 .73	0.4031 2	$\sigma =$ 13 9 59	146 7 33	252 50 16	5 5 56
1898 E A . .	13	1898 Nov. 13.5	181 15 2	0 0 0	508 .71	0.5623 6	$\sigma =$ 2 52 42	123 24 49	230 7 32	28 14 21

Erläuterungen zu den Tafeln III und IV.

Diese Tafeln geben die Werthe der Coefficienten $(0, i)$ und $[0, i]$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ für $a = 1.90$ bis $a = 4.30$ nach Norén und Raab.[1] Nach VI § 11 (8) hat man

$$(0, i) = \tfrac{1}{4} m_i n a B_1 (a, a_i),$$
$$[0, i] = \tfrac{1}{4} m_i n a B_2 (a, a_i),$$

wo B_1 und B_2 durch die Entwickelung

$$\frac{a a_i}{[a^2 + a_i^2 - 2 a a_i \cos\varphi]^{3/2}} = \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos i\varphi$$

definirt sind.

Für die Planetenmassen (m_i) haben die Verfasser folgende Werthe angenommen:

Mercur . .	$m_1 = \frac{1}{8374672}$,	Jupiter . .	$m_5 = \frac{1}{1047.568}$,
Venus . .	$m_2 = \frac{1}{408968}$,	Saturn . .	$m_6 = \frac{1}{3501.6}$,
Erde . . .	$m_3 = \frac{1}{327214}$,	Uranus . .	$m_7 = \frac{1}{22869}$,
Mars . . .	$m_4 = \frac{1}{3093500}$,	Neptun . .	$m_8 = \frac{1}{19314}$.

Will man für die Masse m_i sich eines anderen Werthes bedienen, der um δm_i grösser als die obigen Zahlen ist, so hat man

[1] Hilfstafeln zur Berechnung der secularen Störungen der kleinen Planeten (Meddel. från Lunds Observatorium Ser. II Nr. 2).

zu den aus der Tafel erhaltenen Werthen für $(0, i)$ und $[0, i]$ die Correctionen

$$\frac{\delta m_i}{m_i}(0, i) \text{ und } \frac{\delta m_i}{m_i}[0, i]$$

hinzuzufügen.

Die hier wiedergegebenen Tafeln sind ausschliesslich zu der Berechnung der secularen Störungen der kleinen Planeten geeignet. Für die Berechnung der secularen Störungen in anderen Fällen verweise ich auf die Abhandlung von Norén und Raab (Tafel I und II daselbst).

Tafel III (0, i) und $b = \Sigma(0, i)$.

a	☿ (0.1)	♀ (0.2)	♁ (0.3)	♂ (0.4)	♃ (0.5)	♄ (0.6)	⛢ (0.7)	♆ (0.8)	b	Δb
1.90	0″.0021	0″.1765	0″.5794	0″.5530	22″.586	0″.9013	0″.0161	0″.0049	24″.819	208
1.91	0 .0021	0 1728	0 .5646	0 .5234	22 .834	0 .9092	0 .0162	0 .0049	25 .027	213
1.92	0 .0020	0 .1691	0 .5502	0 .4957	23 .085	0 .9170	0 .0163	0 .0050	25 .240	218
1.93	0 .0020	0 .1655	0 .5364	0 .4703	23 .338	0 .9250	0 .0164	0 .0050	25 .458	224
1.94	0 .0019	0 .1620	0 .5231	0 .4471	23 .593	0 .9329	0 .0165	0 .0050	25 .682	228
1.95	0 .0019	0 .1586	0 .5102	0 .4257	23 .851	0 .9409	0 .0167	0 .0051	25 .910	232
1.96	0 .0018	0 .1553	0 .4977	0 .4053	24 .111	0 .9490	0 .0168	0 .0051	26 .142	237
1.97	0 .0018	0 .1521	0 .4856	0 .3865	24 .374	0 .9571	0 .0169	0 .0052	26 .379	241
1.98	0 .0018	0 .1490	0 .4739	0 .3688	24 .639	0 .9652	0 .0171	0 .0052	26 .620	245
1.99	0 .0017	0 .1460	0 .4627	0 .3526	24 .906	0 .9733	0 .0172	0 .0053	26 .865	249
2.00	0 .0017	0 .1430	0 .4518	0 .3371	25 .176	0 .9815	0 .0173	0 .0053	27 .114	253
2.01	0 .0017	0 .1402	0 .4412	0 .3227	25 .448	0 .9897	0 .0175	0 .0053	27 .367	257
2.02	0 .0016	0 .1374	0 .4309	0 .3091	25 .724	0 .9980	0 .0176	0 .0054	27 .624	260
2.03	0 .0016	0 .1347	0 .4210	0 .2963	26 .001	1 .0063	0 .0177	0 .0054	27 .884	265
2.04	0 .0016	0 .1320	0 .4114	0 .2844	26 .281	1 .0147	0 .0179	0 .0055	28 .149	268
2.05	0 .0015	0 .1294	0 .4020	0 .2731	26 .564	1 .0231	0 .0180	0 .0055	28 .417	272
2.06	0 .0015	0 .1269	0 .3929	0 .2623	26 .850	1 .0315	0 .0182	0 .0056	28 .689	275
2.07	0 .0015	0 .1245	0 .3842	0 .2522	27 .138	1 .0399	0 .0183	0 .0056	28 .964	280
2.08	0 .0015	0 .1221	0 .3757	0 .2427	27 .430	1 .0483	0 .0184	0 .0056	29 .244	283
2.09	0 .0014	0 .1197	0 .3674	0 .2337	27 .724	1 .0568	0 .0186	0 .0057	29 .527	287

Tafel III (0, i) und b = Σ(0, i).

a	☿ (0.1)	♀ (0.2)	♁ (0.3)	♂ (0.4)	♃ (0.5)	♄ (0.6)	♅ (0.7)	♆ (0.8)	b	Δb
2.10	0″.0014	0″.1174	0″.3594	0″.2252	28″.021	1″.0654	0″.0187	0″.0057	29″.814	290
2.11	0 .0014	0 .1152	0 .3516	0 .2171	28 .320	1 .0740	0 .0188	0 .0057	30 .104	294
2.12	0 .0014	0 .1131	0 .3441	0 .2093	28 .622	1 .0826	0 .0190	0 .0057	30 .398	297
2.13	0 .0014	0 .1110	0 .3368	0 .2020	28 .928	1 .0913	0 .0191	0 .0058	30 .695	301
2.14	0 .0014	0 .1089	0 .3297	0 .1950	29 .236	1 .1000	0 .0192	0 .0058	30 .996	305
2.15	0 .0013	0 .1069	0 .3228	0 .1884	29 .548	1 .1087	0 .0194	0 .0059	31 .301	309
2.16	0 .0013	0 .1050	0 .3161	0 .1820	29 .863	1 .1174	0 .0195	0 .0059	31 .610	312
2.17	0 .0013	0 .1031	0 .3095	0 .1760	30 .180	1 .1263	0 .0197	0 .0060	31 .922	316
2.18	0 .0013	0 .1012	0 .3031	0 .1703	30 .501	1 .1352	0 .0198	0 .0060	32 .238	320
2.19	0 .0013	0 .0994	0 .2969	0 .1648	30 .825	1 .1441	0 .0200	0 .0060	32 .558	324
2.20	0 .0012	0 .0977	0 .2909	0 .1596	31 .153	1 .1531	0 .0201	0 .0061	32 .882	327
2.21	0 .0012	0 .0959	0 .2851	0 .1546	31 .484	1 .1621	0 .0202	0 .0061	33 .209	331
2.22	0 .0012	0 .0942	0 .2795	0 .1498	31 .818	1 .1711	0 .0204	0 .0062	33 .540	335
2.23	0 .0012	0 .0926	0 .2739	0 .1453	32 .155	1 .1801	0 .0205	0 .0062	33 .875	338
2.24	0 .0011	0 .0909	0 .2684	0 .1409	32 .495	1 .1892	0 .0207	0 .0063	34 .213	342
2.25	0 .0011	0 .0893	0 .2631	0 .1367	32 .839	1 .1984	0 .0208	0 .0063	34 .555	347
2.26	0 .0011	0 .0877	0 .2580	0 .1327	33 .187	1 .2076	0 .0210	0 .0064	34 .902	350
2.27	0 .0011	0 .0862	0 .2530	0 .1288	33 .538	1 .2168	0 .0211	0 .0064	35 .252	354
2.28	0 .0010	0 .0848	0 .2482	0 .1252	33 .893	1 .2261	0 .0212	0 .0064	35 .606	358
2.29	0 .0010	0 .0834	0 .2434	0 .1216	34 .251	1 .2354	0 .0214	0 .0065	35 .964	363
2.30	0 .0010	0 .0820	0 .2388	0 .1182	34 .614	1 .2447	0 .0215	0 .0065	36 .327	366
2.31	0 .0010	0 .0806	0 .2344	0 .1149	34 .980	1 .2541	0 .0217	0 .0066	36 .693	370
2.32	0 .0010	0 .0792	0 .2300	0 .1118	35 .349	1 .2635	0 .0218	0 .0066	37 .063	375
2.33	0 .0010	0 .0779	0 .2257	0 .1088	35 .723	1 .2730	0 .0220	0 .0067	37 .438	[illegible]

2.37	0 .0009	0 .0729	0 .[illegible]	0 .0978	37 .257	1 .3113	0 .0226	0 .0068	38 .979	[illegible]
2.38	0 .0009	0 .0717	0 .2058	0 .0953	37 .651	1 .3210	0 .0227	0 .0069	39 .375	396
2.39	0 .0009	0 .0706	0 .2022	0 .0929	38 .048	1 .3308	0 .0229	0 .0069	39 .775	400
										405
2.40	0 .0008	0 .0695	0 .1986	0 .0905	38 .450	1 .3406	0 .0230	0 .0070	40 .180	410
2.41	0 .0008	0 .0683	0 .1951	0 .0883	38 .857	1 .3504	0 .0232	0 .0070	40 .590	415
2.42	0 .0008	0 .0672	0 .1917	0 .0861	39 .268	1 .3603	0 .0233	0 .0071	41 .005	419
2.43	0 .0008	0 .0662	0 .1883	0 .0840	39 .684	1 .3701	0 .0235	0 .0071	41 .424	423
2.44	0 .0008	0 .0651	0 .1851	0 .0819	40 .104	1 .3800	0 .0236	0 .0071	41 .847	428
2.45	0 .0008	0 .0641	0 .1819	0 .0799	40 .527	1 .3900	0 .0238	0 .0072	42 .275	433
2.46	0 .0008	0 .0631	0 .1788	0 .0780	40 .956	1 .4001	0 .0239	0 .0072	42 .708	438
2.47	0 .0008	0 .0621	0 .1757	0 .0762	41 .390	1 .4102	0 .0241	0 .0073	43 .146	443
2.48	0 .0007	0 .0611	0 .1727	0 .0744	41 .828	1 .4203	0 .0242	0 .0073	43 .589	448
2.49	0 .0007	0 .0602	0 .1698	0 .0727	42 .271	1 .4305	0 .0243	0 .0074	44 .037	453
2.50	0 .0007	0 .0592	0 .1670	0 .0710	42 .720	1 .4407	0 .0245	0 .0074	44 .490	459
2.51	0 .0007	0 .0584	0 .1642	0 .0694	43 .173	1 .4509	0 .0247	0 .0075	44 .949	464
2.52	0 .0007	0 .0575	0 .1615	0 .0679	43 .632	1 .4612	0 .0248	0 .0075	45 .413	469
2.53	0 .0007	0 .0566	0 .1588	0 .0664	44 .095	1 .4716	0 .0250	0 .0076	45 .882	474
2.54	0 .0007	0 .0558	0 .1562	0 .0649	44 .564	1 .4820	0 .0251	0 .0076	46 .356	480
2.55	0 .0007	0 .0549	0 .1536	0 .0635	45 .038	1 .4924	0 .0253	0 .0077	46 .836	485
2.56	0 .0007	0 .0541	0 .1511	0 .0622	45 .517	1 .5029	0 .0254	0 .0077	47 .321	491
2.57	0 .0007	0 .0533	0 .1487	0 .0608	46 .002	1 .5135	0 .0256	0 .0078	47 .812	497
2.58	0 .0007	0 .0526	0 .1463	0 .0595	46 .492	1 .5240	0 .0258	0 .0078	48 .309	502
2.59	0 .0006	0 .0518	0 .1439	0 .0583	46 .988	1 .5347	0 .0259	0 .0079	48 .811	508
2.60	0 .0007	0 .0510	0 .1416	0 .0570	47 .489	1 .5454	0 .0261	0 .0079	49 .319	514
2.61	0 .0007	0 .0502	0 .1394	0 .0558	47 .997	1 .5561	0 .0262	0 .0080	49 .833	521
2.62	0 .0006	0 .0496	0 .1372	0 .0547	48 .511	1 .5669	0 .0264	0 .0080	50 .354	526
2.63	0 .0006	0 .0489	0 .1350	0 .0536	49 .030	1 .5777	0 .0265	0 .0080	50 .880	533
2.64	0 .0006	0 .0482	0 .1329	0 .0525	49 .555	1 .5885	0 .0267	0 .0081	51 .413	539

Tafel III (0, i) und $b = \Sigma(0, i)$.

a	☿ (0.1)	♀ (0.2)	♁ (0.3)	♂ (0.4)	♃ (0.5)	♄ (0.6)	♅ (0.7)	♆ (0.8)	b	Δb
2.65	0″.0006	0″.0475	0″.1309	0″.0514	50″.087	1″.5995	0″.0269	0″.0081	51″.952	
2.66	0 .0006	0 .0468	0 .1289	0 .0504	50 .625	1 .6105	0 .0270	0 .0082	52 .497	545
2.67	0 .0006	0 .0462	0 .1269	0 .0494	51 .169	1 .6215	0 .0272	0 .0082	53 .049	552
2.68	0 .0006	0 .0455	0 .1250	0 .0484	51 .719	1 .6326	0 .0273	0 .0083	53 .607	558
2.69	0 .0006	0 .0449	0 .1231	0 0475	52 .277	1 .6437	0 .0275	0 .0083	54 .172	565
2.70	0 .0005	0 .0443	0 .1212	0 .0466	52 .841	1 .6548	0 .0277	0 .0084	54 .744	572
2.71	0 .0005	0 .0437	0 .1194	0 .0457	53 .412	1 .6660	0 .0278	0 .0084	55 .323	579
2.72	0 .0005	0 .0431	0 .1177	0 .0448	53 .989	1 .6773	0 .0280	0 .0084	55 .909	586
2.73	0 .0005	0 .0425	0 .1159	0 .0439	54 .574	1 .6887	0 .0282	0 .0085	56 .502	593
2.74	0 .0005	0 .0419	0 .1142	0 .0431	55 .166	1 .7001	0 .0283	0 .0085	57 .103	601
2.75	0 .0005	0 .0413	0 .1125	0 .0423	55 .765	1 7115	0 .0285	0 .0086	57 .711	608
2.76	0 .0005	0 .0407	0 .1108	0 .0415	56 .372	1 .7230	0 .0286	0 .0086	58 .326	615
2.77	0 .0005	0 .0401	0 .1092	0 .0407	56 .986	1 .7345	0 .0288	0 .0087	58 .949	623
2.78	0 .0005	0 .0396	0 .1076	0 .0399	57 .608	1 .7460	0 .0290	0 .0087	59 .579	630
2.79	0 .0005	0 .0391	0. 1061	0 .0392	58 .237	1 .7577	0 .0291	0 .0088	60 .218	639
2.80	0 .0005	0 .0385	0 .1046	0 .0385	58 .874	1 .7694	0 .0293	0 .0088	60 .864	646
2.81	0 .0005	0 .0380	0 .1031	0 .0378	59 .520	1 .7812	0 .0295	0 .0089	61 .519	655
2.82	0 .0005	0 .0375	0 .1016	0 .0371	60 .173	1 .7930	0 .0296	0 .0089	62 .181	662
2.83	0 .0005	0 .0370	0 .1001	0 .0364	60 .834	1 .8048	0 .0298	0 .0090	62 .852	671
2.84	0 .0005	0 .0365	0 .0987	0 .0358	61 .504	1 .8168	0 .0300	0 .0090	63 .532	680
2.85	0 .0005	0 .0361	0 .0973	0 .0352	62 .183	1 .8287	0 .0301	0 .0091	64 .220	688
2.86	0 .0005	0 .0356	0 .0959	0 .0346	62 .870	1 .8408	0 .0303	0 .0091	64 .917	697
2.87	0 .0004	0 .0352	0 .0946	0 .0340	63 .567	1 .8528	0 .0305	0 .0091	65 .623	706
2.88	0 .0004	0 .0347	0 .0933	0 .0334	64 .272	1 .8649	0 .0306	0 .0092	66 .339	716

2.92	0 .0004	0 .0329	0 .0883	0 .0312	67 .186	1 .9140	0 .0313	0 .0094	69 .2[illegible]4	763
2.93	0 .0004	0 .0325	0 .0871	0 .0307	67 .939	1 .9264	0 .0315	0 .0094	70 .057	773
2.94	0 .0004	0 .0321	0 .0859	0 .0302	68 .701	1 .9388	0 .0317	0 .0095	70 .830	783
2.95	0 .0004	0 .0317	0 .0846	0 .0297	69 .474	1 .9512	0 .0318	0 .0095	71 .613	794
2.96	0 .0004	0 .0313	0 .0834	0 .0292	70 .258	1 .9637	0 .0320	0 .0096	72 .407	805
2.97	0 .0004	0 .0309	0 .0823	0 .0287	71 .051	1 .9764	0 .0322	0 .0096	73 .212	815
2.98	0 .0004	0 .0305	0 .0812	0 .0283	71 .855	1 .9892	0 .0324	0 .0097	74 .027	827
2.99	0 .0004	0 .0301	0 .0802	0 .0278	72 .671	2 .0020	0 .0325	0 .0097	74 .854	838
3.00	0 .0004	0 .0297	0 .0792	0 .0274	73 .498	2 .0149	0 .0327	0 .0097	75 .692	849
3.01	0 .0004	0 .0294	0 .0782	0 .0269	74 .336	2 .0277	0 .0329	0 .0098	76 .541	861
3.02	0 .0004	0 .0290	0 .0772	0 .0265	75 .186	2 .0406	0 .0330	0 .0098	77 .402	873
3.03	0 .0004	0 .0286	0 .0762	0 .0261	76 .047	2 .0536	0 .0332	0 .0099	78 .275	885
3.04	0 .0004	0 .0283	0 .0753	0 .0257	76 .920	2 .0666	0 .0334	0 .0099	79 .160	897
3.05	0 .0004	0 .0280	0 .0743	0 .0253	77 .806	2 .0796	0 .0336	0 .0100	80 .057	909
3.06	0 .0004	0 .0276	0 .0734	0 .0249	78 .703	2 .0928	0 .0337	0 .0101	80 .966	922
3.07	0 .0004	0 .0273	0 .0724	0 .0245	79 .614	2 .1060	0 .0339	0 .0101	81 .888	936
3.08	0 .0004	0 .0270	0 .0715	0 .0242	80 .537	2 .1193	0 .0341	0 .0102	82 .824	948
3.09	0 .0004	0 .0267	0 .0706	0 .0238	81 .473	2 .1326	0 .0343	0 .0102	83 .772	962
3.10	0 .0003	0 .0264	0 .0697	0 .0234	82 .424	2 .1461	0 .0344	0 .0103	84 .734	977
3.11	0 .0003	0 .0260	0 .0688	0 .0231	83 .388	2 .1596	0 .0346	0 .0103	85 .711	990
3.12	0 .0003	0 .0257	0 .0679	0 .0227	84 .366	2 .1731	0 .0348	0 .0104	86 .701	1004
3.13	0 .0003	0 .0254	0 .0671	0 .0224	85 .357	2 .1867	0 .0350	0 .0104	87 .705	1019
3.14	0 .0003	0 .0251	0 .0663	0 .0221	86 .364	2 .2004	0 .0352	0 .0105	88 .724	1034
3.15	0 .0003	0 .0248	0 .0654	0 .0218	87 .386	2 .2142	0 .0353	0 .0105	89 .758	1049
3.16	0 .0003	0 .0245	0 .0646	0 .0215	88 .422	2 .2280	0 .0355	0 .0106	90 .807	1064
3.17	0 .0003	0 .0243	0 .0638	0 .0211	89 .474	2 .2418	0 .0357	0 .0106	91 .871	1080
3.18	0 .0003	0 .0240	0 .0630	0 .0208	90 .541	2 .2557	0 .0359	0 .0107	92 .951	1096
3.19	0 .0003	0 .0237	0 .0623	0 .0205	91 .624	2 .2697	0 .0361	0 .0107	94 .047	1113

Tafel III (0, i) und $b = \sum(0, i)$.

a	☿ (0.1)	♀ (0.2)	♁ (0.3)	♂ (0.4)	♃ (0.5)	♄ (0.6)	⛢ (0.7)	♆ (0.8)	b	Δb
3.20	0".0003	0".0235	0".0615	0".0202	92".728	2".2838	0".0362	0".0108	95".160	1129
3.21	0 .0003	0 .0232	0 .0608	0 .0199	93 .840	2 .2980	0 .0364	0 .0109	96 .289	1146
3.22	0 .0003	0 .0229	0 .0600	0 .0196	94 .978	2 .3122	0 .0366	0 .0109	97 .435	1164
3.23	0 .0003	0 .0227	0 .0593	0 0.193	96 .123	2 .3264	0 .0368	0 .0110	98 .599	1182
3.24	0 .0003	0. 0224	0 .0586	0 .0190	97 .292	2 .3408	0 .0370	0 .0110	99 .781	1200
3.25	0 .0003	0 .0222	0 .0579	0 .0188	98 .478	2 .3552	0 .0371	0 .0111	100 .981	1217
3.26	0 .0003	0 .0219	0 .0572	0 .0185	99 .682	2 .3697	0 .0373	0 .0111	102 .198	1237
3.27	0 .0003	0 .0217	0 .0565	0 .0183	100 .905	2 .3842	0 .0375	0 .0112	103 .435	1256
3.28	0 .0003	0 .0214	0 .0558	0 .0180	102 .148	2 .3988	0 .0377	0 .0112	104 .691	1276
3.29	0 .0003	0 .0211	0 .0552	0 .0178	103 .410	2 .4136	0 .0379	0 .0113	105 .967	1296
3.30	0 .0003	0 .0209	0 .0545	0 .0175	104 .692	2 .4283	0 .0381	0 .0113	107 .263	1315
3.31	0 .0003	0 .0207	0 .0539	0 .0173	105 .993	2 .4431	0 .0383	0 .0114	108 .578	1338
3.32	0 .0003	0 .0205	0 .0532	0 .0170	107 .317	2 .4581	0 .0385	0 .0115	109 .916	1358
3.33	0 .0003	0 .0202	0 .0526	0 .0168	108 .661	2 .4731	0 .0386	0 .0115	111 .274	1381
3.34	0 .0003	0 .0200	0 .0520	0 .0166	110 .028	2 .4881	0 .0388	0 .0116	112 .655	1403
3.35	0 .0003	0 .0198	0 .0514	0 .0164	111 .416	2 .5033	0 .0390	0 .0116	114 .058	1426
3.36	0 .0003	0 .0196	0 .0508	0 .0162	112 .828	2 .5185	0 .0392	0 .0117	115 .484	1449
3.37	0 .0002	0 .0194	0 .0502	0 .0159	114 .262	2 .5337	0 .0394	0 .0117	116 .933	1472
3.38	0 .0002	0 .0191	0 .0496	0 .0157	115 .720	2 .5489	0 .0396	0 .0118	118 .405	1498
3.39	0 .0002	0 .0189	0 .0490	0 .0155	117 .203	2 .5643	0 .0398	0 .0118	119 .903	1522
3.40	0 .0002	0 .0187	0 .0485	0 .0153	118 .711	2 .5798	0 .0400	0 .0119	121 .425	1548
3.41	0 .0002	0 .0185	0 .0480	0 .0152	120 .244	2 .5954	0 .0402	0 .0120	122 .973	1573
3.42	0 .0002	0 .0183	0 .0475	0 .0150	121 .802	2 .6110	0 .0403	0 .0120	124 .546	1600
3.43	0 .0002	0 .0181	0 .0470	0 .0148	[illegible]	[illegible]	0 .0405	0 .0121	[illegible]	

3.46	0 .0002	0 .0175	0 .0454	[illegible]	[illegible]					
3.47	0 .0002	0 .0173	0 .0449	0 .0141	130 .004	2 .6904	0 .0413	0 .0123	132 .820	1743
3.48	0 .0002	0 .0171	0 .0444	0 .0139	131 .732	2 .7065	0 .0415	0 .0124	134 .568	1774
3.49	0 .0002	0 .0170	0 .0439	0 .0137	133 .490	2 .7227	0 .0417	0 .0124	136 .342	1804
3.50	0 .0002	0 .0168	0 .0434	0 .0135	135 .279	2 .7389	0 .0419	0 .0125	138 .146	1837
3.51	0 .0002	0 .0166	0 .0430	0 .0134	137 .100	2 .7553	0 .0421	0 .0125	139 .983	1871
3.52	0 .0002	0 .0164	0 .0425	0 .0132	138 .955	2 .7718	0 .0423	0 .0126	141 .854	1904
3.53	0 .0002	0 .0162	0 .0420	0 .0130	140 .843	2 .7883	0 .0425	0 .0126	143 .758	1936
3.54	0 .0002	0 .0161	0 .0416	0 .0129	142 .763	2 .8050	0 .0427	0 .0127	145 .694	1971
3.55	0 .0002	0 .0159	0 .0412	0 .0127	144 .718	2 .8216	0 .0429	0 .0128	147 .665	2008
3.56	0 .0002	0 .0158	0 .0407	0 .0126	146 .710	2 .8384	0 .0431	0 .0128	149 .673	2046
3.57	0 .0002	0 .0156	0 .0403	0 .0124	148 .739	2 .8552	0 .0433	0 .0129	151 .719	2082
3.58	0 .0002	0 .0154	0 .0398	0 .0123	150 .805	2 .8722	0 .0435	0 .0129	153 .801	2122
3.59	0 .0002	0 .0153	0 .0394	0 .0121	152 .910	2 .8892	0 .0437	0 .0130	155 .923	2163
3.60	0 .0002	0 .0152	0 .0390	0 .0120	155 .056	2 .9063	0 .0439	0 .0130	158 .086	2202
3.61	0 .0002	0 .0150	0 .0386	0 .0119	157 .242	2 .9235	0 .0441	0 .0131	160 .288	2245
3.62	0 .0002	0 .0148	0 .0382	0 .0117	159 .470	2 .9407	0 .0443	0 .0132	162 .533	2287
3.63	0 .0002	0 .0147	0 .0378	0 .0116	161 .740	2 .9581	0 .0445	0 .0132	164 .820	2332
3.64	0 .0002	0 .0146	0 .0374	0 .0114	164 .054	2 .9756	0 .0447	0 .0133	167 .152	2378
3.65	0 .0002	0 .0144	0 .0370	0 .0113	166 .413	2 .9932	0 .0449	0 .0133	169 .527	2425
3.66	0 .0002	0 .0143	0 .0366	0 .0112	168 .820	3 .0107	0 .0451	0 .0134	171 .952	2470
3.67	0 .0002	0 .0141	0 .0363	0 .0110	171 .273	3 .0285	0 .0453	0 .0134	174 .422	2515
3.68	0 .0002	0 .0140	0 .0359	0 .0109	173 .771	3 .0464	0 .0455	0 .0135	176 .937	2570
3.69	0 .0002	0 .0139	0 .0355	0 .0107	176 .321	3 .0643	0 .0457	0 .0135	179 .507	2618
3.70	0 .0002	0 .0138	0 .0351	0 .0106	178 .924	3 .0821	0 .0459	0 .0136	182 .125	2670
3.71	0 .0002	0 .0136	0 .0347	0 .0105	181 .576	3 .1001	0 .0461	0 .0137	184 .795	2729
3.72	0 .0002	0 .0135	0 .0344	0 .0104	184 .287	3 .1183	0 .0463	0 .0137	187 .524	2784
3.73	0 .0002	0 .0134	0 .0341	0 .0102	187 .053	3 .1366	0 .0465	0 .0138	190 .308	2839
3.74	0 .0002	0 .0132	0 .0338	0 .0101	189 .874	3 .1549	0 .0467	0 .0138	193 .147	2896

Tafel III (0, i) und $b = \Sigma(0, i)$.

a	☿ (0.1)	♀ (0.2)	⚳ (0.3)	♂ (0.4)	♃ (0.5)	♄ (0.6)	⛢ (0.7)	♉ (0.8)	b	Δb
3.75	0″.0002	0″0.131	0″.0334	0″.0100	192″.752	3″.1735	0″.0469	0″.0139	196″.043	2960
3.76	0 .0002	0 0.130	0 .0331	0 .0099	195 .694	3 .1921	0 .0471	0 .0139	199 .003	3021
3.77	0 .0002	0 .0129	0 .0327	0 .0098	198 .696	3 .2108	0 .0473	0 .0140	202 .024	3084
3.78	0 .0002	0 .0127	0 .0324	0 .0097	201 .762	3 .2295	0 .0475	0 .0140	205 .108	3150
3.79	0 .0002	0 .0126	0 .0321	0 .0096	204 .893	3 .2484	0 .0477	0 .0141	208 .258	3219
3.80	0 .0002	0 .0125	0 .0318	0 .0095	208 .093	3 .2673	0 .0480	0 .0142	211 .477	3285
3.81	0 .0002	0 .0124	0 .0315	0 .0094	211 .360	3 .2863	0 .0482	0 .0142	214 .762	3358
3.82	0 .0002	0 .0122	0 .0312	0 .0093	214 .699	3 .3055	0 .0484	0 .0143	218 .120	3433
3.83	0 .0002	0 .0121	0 .0309	0 .0092	218 .113	3 .3248	0 .0486	0 .0143	221 .553	3507
3.84	0 .0002	0 .0120	0 .0306	0 .0091	221 .601	3 .3440	0 .0488	0 .0144	225 .060	3586
3.85	0 .0002	0 .0119	0 .0303	0 .0090	225 .168	3 .3635	0 .0490	0 .0144	228 .646	3668
3.86	0 .0002	0 .0118	0 .0300	0 .0089	228 .816	3 .3831	0 .0492	0 .0145	232 .314	3748
3.87	0 .0002	0 .0117	0 .0297	0 .0088	232 .546	3 .4027	0 .0494	0 .0146	236 .062	3836
3.88	0 .0002	0 .0116	0 .0294	0 .0087	236 .361	3 .4225	0 .0496	0 .0146	239 .898	3921
3.89	0 .0002	0 .0115	0 .0291	0 .0086	240 .268	3 .4423	0 .0498	0 .0147	243 .819	4013
3.90	0 .0002	0 .0114	0 .0288	0 .0085	244 .256	3 .4623	0 .0501	0 .0147	247 .832	4106
3.91	0 .0002	0 .0113	0 .0286	0 .0084	248 .342	3 .4824	0 .0503	0 .0148	251 .938	4203
3.92	0 .0002	0 .0112	0 .0283	0 .0083	252 .525	3 .5026	0 .0505	0 .0148	256 .141	4302
3.93	0 .0002	0 .0111	0 .0280	0 .0082	256 .807	3 .5229	0 .0507	0 .0149	260 .443	4403
3.94	0 .0002	0 .0110	0 .0278	0 .0081	261 .190	3 .5433	0 .0509	0 .0149	264 .846	4507
3.95	0 .0002	0 .0109	0 .0275	0 .0081	265 .676	3 .5638	0 .0511	0 .0150	269 .353	4613
3.96	0 .0002	0 .0108	0 .0273	0 .0080	270 .269	3 .5844	0 .0513	0 .0150	273 .966	4736
3.97	0 .0002	0 .0107	0 .0270	0 .0079	274 .984	3 .6052	0 .0516	0 .0151	278 .702	4855
3.98	0 .0002	0 .0106	0 .0267	0 .0078	279 .819	3 .6260	0 .0518	0 .0152	283 .557	

4.02	0 .0002	0 .0102	0 .0257	0 .0075	800 .576		0 .0529	0 .0155	309 .690	
4.03	0 .0002	0 .0101	0 .0255	0 .0074	305 .846	3 .7320	0 .0531	0 .0155	315 .325	5635
4.04	0 .0002	0 .0100	0 .0252	0 .0074	311 .460	3 .7534	0 .0533	0 .0155	315 .325	5782
4.05	0 .0002	0 .0099	0 .0250	0 .0073	317 .221	3 .7749	0 .0533	0 .0156	321 .107	5934
4.06	0 .0002	0 .0098	0 .0248	0 .0072	323 .133	3 .7966	0 0.535	0 .0156	327 .041	6093
4.07	0 .0002	0 .0097	0 .0246	0 .0071	329 .204	3 .8185	0 .0537	0 .0157	333 .134	6258
4.08	0 .0001	0 .0096	0 .0243	0 .0071	335 .441	3 .8405	0 .0540	0 .0158	339 .392	6423
4.09	0 .0001	0 .0096	0 .0241	0 .0070	341 .841	3 .8627	0 .0542	0 .0158	345 .815	6601
4.10	0 .0001	0 .0095	0 .0239	0 .0069	348 .420	3 .8850	0 .0544	0 .0159	352 .416	6781
4.11	0 .0001	0 .0094	0 .0237	0 .0069	355 .179	3 .9073	0 .0546	0 .0159	359 .197	6973
4.12	0 .0001	0 .0093	0 .0235	0 .0068	362 .130	3 .9298	0 .0549	0 .0160	366 .170	7169
4.13	0 .0001	0 .0093	0 .0233	0 .0067	369 .276	3 .9524	0 .0551	0 .0161	373 .339	7371
4.14	0 .0001	0 .0092	0 .0231	0 .0067	376 .624	3 .9752	0 .0553	0 .0161	380 .710	7581
4.15	0 .0001	0 .0091	0 .0228	0 .0066	384 .183	3 .9980	0 .0555	0 .0162	388 .291	7801
4.16	0 .0001	0 .0090	0 .0226	0 .0065	391 .961	4 .0210	0 .0558	0 .0162	396 .092	8029
4.17	0 .0001	0 .0090	0 .0224	0 .0065	399 .967	4 .0441	0 .0560	0 .0163	404 .121	8266
4.18	0 .0001	0 .0089	0 .0222	0 .0064	408 .209	4 .0674	0 .0562	0 .0164	412 .387	8512
4.19	0 .0001	0 .0088	0 .0220	0 .0064	416 .698	4 .0908	0 .0564	0 .0164	420 .899	8766
4.20	0 .0001	0 .0087	0 .0218	0 .0063	425 .441	4 .1143	0 .0567	0 .0165	429 .665	9034
4.21	0 .0001	0 .0086	0 .0217	0 .0062	434 .451	4 .1379	0 .0569	0 .0165	438 .699	9312
4.22	0 .0001	0 .0086	0 .0215	0 .0062	443 .739	4 .1617	0 .0571	0 .0166	448 .011	9601
4.23	0 .0001	0 .0085	0 .0213	0 .0061	453 .316	4 .1856	0 .0573	0 .0167	457 .612	9900
4.24	0 .0001	0 .0084	0 .0211	0 .0060	463 .192	4 .2097	0 .0576	0 .0167	467 .512	10213
4.25	0 .0001	0 .0083	0 .0209	0 .0060	473 .381	4 .2338	0 .0578	0 .0168	477 .725	10540
4.26	0 .0001	0 .0083	0 .0207	0 .0059	483 .897	4 .2581	0 .0580	0 .0169	488 .265	10882
4.27	0 .0001	0 .0082	0 .0205	0 .0059	494 .755	4 .2825	0 .0583	0 .0169	499 .147	11240
4.28	0 .0001	0 .0081	0 .0204	0 .0058	505 .970	4 .3071	0 .0585	0 .0170	510 .387	11610
4.29	0 .0001	0 .0081	0 .0202	0 .0058	517 .555	4 .3318	0 .0587	0 .0171	521 .997	11997
4.30	0 .0001	0 .0080	0 .0200	0 .0057	529 .527	4 .3567	0 .0590	0 .0171	533 .994	

Tafel IV [0, r]

e	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♆ [0.8]
1.90	0″.0005	0″.0823	0″.3667	0″.4965	10″.131	0″.2230	0″.0020	0″.0003
1.91	0 .0005	0 .0803	0 .3556	0 .4686	10 .294	0 .2261	0 .0020	0 .0003
1.92	0 .0005	0 .0782	0 .3449	0 .4426	10 .460	0 .2292	0 .0020	0 .0003
1.93	0 .0005	0 .0761	0 .3347	0 .4182	10 .627	0 .2325	0 .0021	0 .0003
1.94	0 .0005	0 .0741	0 .3248	0 .3963	10 .797	0 .2356	0 .0021	0 .0003
1.95	0 .0005	0 .0722	0 .3153	0 .3757	10 .969	0 .2389	0 .0021	0 .0003
1.96	0 .0005	0 .0704	0 .3061	0 .3566	11 .144	0 .2421	0 .0021	0 .0003
1.97	0 .0005	0 .0686	0 .2972	0 .3387	11 .320	0 .2455	0 .0022	0 .0003
1.98	0 .0005	0 .0668	0 .2887	0 .3220	11 .499	0 .2488	0 .0022	0 .0003
1.99	0 .0004	0 .0652	0 .2806	0 .3066	11 .680	0 .2522	0 .0022	0 .0004
2.00	0 .0004	0 .0636	0 .2727	0 .2921	11 .864	0 .2555	0 .0023	0 .0004
2.01	0 .0004	0 .0620	0 .2651	0 .2786	12 .050	0 .2589	0 .0023	0 .0004
2.02	0 .0004	0 .0605	0 .2577	0 .2660	12 .238	0 .2624	0 .0023	0 .0004
2.03	0 .0004	0 .0590	0 .2506	0 .2540	12 .428	0 .2658	0 .0023	0 .0004
2.04	0 .0004	0 .0575	0 .2438	0 .2428	12 .621	0 .2693	0 .0024	0 .0004
2.05	0 .0004	0 .0561	0 .2372	0 .2322	12 .817	0 .2729	0 .0024	0 .0004
2.06	0 .0004	0 .0548	0 .2308	0 .2222	13 .015	0 .2765	0 .0024	0 .0004
2.07	0 .0004	0 .0535	0 .2247	0 .2129	13 .216	0 .2801	0 .0025	0 .0004
2.08	0 .0004	0 .0522	0 .2187	0 .2041	13 .420	0 .2837	0 .0025	0 .0004
2.09	0 .0004	0 .0510	0 .2129	0 .1957	13 .626	0 .2874	0 .0025	0 .0004
2.10	0 .0003	0 .0498	0 .2073	0 .1878	13 .834	0 .2911	0 .0025	0 .0004
2.11	0 .0003	0 .0486	0 .2019	0 .1803	14 .046	0 .2948	0 .0026	0 .0004
2.12	0 .0003	0 .0475	0 .1968	0 .1733	14 .260	0 .2986	0 .0026	0 .0004
2.13	0 .0003	0 .0464	0 .1917	0 .1667	14 .477	0 .3023	0 .0026	0 .0004
2.14	0 .0003	0 .0453	0 .1869	0 .1603	14 .697	0 .3061	0 .0027	0 .0004
2.15	0 .0003	0 .0443	0 .1821	0 .1543	14 .919	0 .3100	0 .0027	0 .0005
2.16	0 .0003	0 .0433	0 .1776	0 .1486	15 .145	0 .3139	0 .0027	0 .0005
2.17	0 .0003	0 .0423	0 .1732	0 .1432	15 .373	0 .3178	0 .0028	0 .0005
2.18	0 .0003	0 .0414	0 .1689	0 .1381	15 .605	0 .3219	0 .0028	0 .0005
2.19	0 .0003	0 .0405	0 .1647	0 .1332	15 .839	0 .3259	0 .0028	0 .0005
2.20	0 .0003	0 .0396	0 .1607	0 .1284	16 .077	0 .3299	0 .0029	0 .0005
2.21	0 .0003	0 .0387	0 .1568	0 .1239	16 .317	0 .3340	0 .0029	0 .0005
2.22	0 .0002	0 .0378	0 .1530	0 .1196	16 .561	0 .3381	0 .0030	0 .0005
2.23	0 .0002	0 .0370	0 .1494	0 .1156	16 .808	0 .3422	0 .0030	0 .0005
2.24	0 .0002	0 .0362	0 .1459	0 .1117	17 .058	0 .3463	0 .0030	0 .0005

Tafel IV [0, ι].

a	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♆ [0.8]
2.25	0″.0002	0″.0354	0″.1424	0″.1079	17″.312	0″.3504	0″.0031	0″.0005
2.26	0 .0002	0 .0346	0 .1390	0 .1044	17 .569	0 .3546	0 .0031	0 .0005
2.27	0 .0002	0 .0339	0 .1357	0 .1010	17 .829	0 .3588	0 .0031	0 .0005
2.28	0 .0002	0 .0331	0 .1326	0 .0976	18 .092	0 .3631	0 .0032	0 .0005
2.29	0 .0002	0 .0324	0 .1295	0 .0946	18 .359	0 .3674	0 .0032	0 .0005
2.30	0 .0002	0 .0318	0 .1266	0 .0916	18 .630	0 .3717	0 .0033	0 .0005
2.31	0 .0002	0 .0311	0 .1237	0 .0887	18 .904	0 .3761	0 .0033	0 .0006
2.32	0 .0002	0 .0304	0 .1208	0 .0860	19 .182	0 .3806	0 .0033	0 .0006
2.33	0 .0002	0 .0298	0 .1181	0 .0834	19 .463	0 .3851	0 .0034	0 .0006
2.34	0 .0002	0 .0292	0 .1155	0 .0809	19 .748	0 .3896	0 .0034	0 .0006
2.35	0 .0002	0 .0286	0 .1129	0 .0785	20 .037	0 .3941	0 .0034	0 .0006
2.36	0 .0002	0 .0280	0 .1104	0 .0762	20 .329	0 .3987	0 .0034	0 .0006
2.37	0 .0002	0 .0274	0 .1080	0 .0739	20 .626	0 .4034	0 .0035	0 .0006
2.38	0 .0002	0 .0269	0 .1056	0 .0717	20 .926	0 .4080	0 .0035	0 .0006
2.39	0 .0002	0 .0264	0 .1033	0 .0697	21 .231	0 .4127	0 .0036	0 .0006
2.40	0 .0002	0 .0259	0 .1011	0 .0677	21 .540	0 .4175	0 .0036	0 .0006
2.41	0 .0002	0 .0254	0 .0990	0 .0658	21 .852	0 .4223	0 .0036	0 .0006
2.42	0 .0002	0 .0248	0 .0968	0 .0639	22 .169	0 .4271	0 .0037	0 .0006
2.43	0 .0002	0 .0243	0 .0947	0 .0621	22 .490	0 .4319	0 .0037	0 .0006
2.44	0 .0002	0 .0239	0 .0927	0 .0604	22 .815	0 .4367	0 .0037	0 .0006
2.45	0 .0002	0 .0234	0 .0908	0 .0587	23 .145	0 .4417	0 .0038	0 .0006
2.46	0 .0002	0 .0230	0 .0888	0 .0571	23 .479	0 .4467	0 .0038	0 .0007
2.47	0 .0002	0 .0225	0 .0870	0 .0556	23 .817	0 .4518	0 .0039	0 .0007
2.48	0 .0002	0 .0221	0 .0852	0 .0541	24 .160	0 .4568	0 .0039	0 .0007
2.49	0 .0002	0 .0217	0 .0834	0 .0527	24 .508	0 .4619	0 .0039	0 .0007
2.50	0 .0001	0 .0213	0 .0817	0 .0513	24 .861	0 .4670	0 .0040	0 .0007
2.51	0 .0001	0 .0208	0 .0800	0 .0500	25 .218	0 .4722	0 .0040	0 .0007
2.52	0 .0001	0 .0204	0 .0784	0 .0487	25 .580	0 .4774	0 .0041	0 .0007
2.53	0 .0001	0 .0200	0 .0768	0 .0475	25 .947	0 .4827	0 .0041	0 .0007
2.54	0 .0001	0 .0197	0 .0753	0 .0462	26 .319	0 .4880	0 .0041	0 .0007
2.55	0 .0001	0 .0193	0 .0738	0 .0450	26 .696	0 .4933	0 .0042	0 .0007
2.56	0 .0001	0 .0189	0 .0723	0 .0439	27 .078	0 .4986	0 .0042	0 .0007
2.57	0 .0001	0 .0186	0 .0709	0 .0428	27 .465	0 .5041	0 .0043	0 .0007
2.58	0 .0001	0 .0182	0 .0695	0 .0418	27 .858	0 .5095	0 .0043	0 .0007
2.59	0 .0001	0 .0178	0 .0681	0 .0408	28 .256	0 .5151	0 .0044	0 .0007

Tafel IV [0, *i*].

a	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♆ [0.8]
2.60	0″.0001	0″.0175	0″.0669	0″.0397	28″.660	0″.5206	0″.0044	0″.0007
2.61	0 .0001	0 .0172	0 .0655	0 .0388	29 .069	0 .5262	0 .0045	0 .0008
2.62	0 .0001	0 .0169	0 .0643	0 .0378	29 .484	0 .5318	0 .0045	0 .0008
2.63	0 .0001	0 .0166	0 .0630	0 .0369	29 .904	0 .5375	0 .0045	0 .0008
2.64	0 .0001	0 .0163	0 .0618	0 .0360	30 .330	0 .5433	0 .0046	0 .0008
2.65	0 .0001	0 .0160	0 .0606	0 .0352	30 .763	0 .5490	0 .0046	0 .0008
2.66	0 .0001	0 .0157	0 .0594	0 .0344	31 .201	0 .5548	0 .0047	0 .0008
2.67	0 .0001	0 .0154	0 .0583	0 .0336	31 .645	0 .5607	0 .0047	0 .0008
2.68	0 .0001	0 .0152	0 .0572	0 .0329	32 .096	0 .5666	0 .0048	0 .0008
2.69	0 .0001	0 .0149	0 .0562	0 .0321	32 .552	0 .5726	0 .0048	0 .0008
2.70	0 .0001	0 .0146	0 .0551	0 .0314	33 .015	0 .5785	0 .0048	0 .0008
2.71	0 .0001	0 .0144	0 .0541	0 .0307	33 .485	0 .5846	0 .0049	0 .0008
2.72	0 .0001	0 .0141	0 .0531	0 .0300	33 .962	0 .5906	0 .0049	0 .0008
2.73	0 .0001	0 .0139	0 .0521	0 .0293	34 .445	0 .5967	0 .0050	0 .0008
2.74	0 .0001	0 .0137	0 .0512	0 .0287	34 .935	0 .6029	0 .0050	0 .0008
2.75	0 .0001	0 .0134	0 .0503	0 .0280	35 .432	0 .6092	0 .0051	0 .0008
2.76	0 .0001	0 .0132	0 .0494	0 .0274	35 .936	0 .6155	0 .0051	0 .0009
2.77	0 .0001	0 .0130	0 .0485	0 .0268	36 .448	0 .6219	0 .0052	0 .0009
2.78	0 .0001	0 .0127	0 .0476	0 .0262	36 .967	0 .6281	0 .0052	0 .0009
2.79	0 .0001	0 .0125	0 .0468	0 .0257	37 .493	0 .6345	0 .0053	0 .0009
2.80	0 .0001	0 .0123	0 .0460	0 .0251	38 .026	0 .6410	0 .0053	0 .0009
2.81	0 .0001	0 .0121	0 .0451	0 .0246	38 .568	0 .6475	0 .0054	0 .0009
2.82	0 .0001	0 .0119	0 .0443	0 .0241	39 .117	0 .6540	0 .0054	0 .0009
2.83	0 .0001	0 .0117	0 .0435	0 .0236	39 .674	0 .6606	0 .0055	0 .0009
2.84	0 .0001	0 .0115	0 .0428	0 .0231	40 .239	0 .6673	0 .0055	0 .0009
2.85	0 .0001	0 .0114	0 .0420	0 .0226	40 .812	0 .6740	0 .0056	0 .0009
2.86	0 .0001	0 .0112	0 .0413	0 .0222	41 .394	0 .6807	0 .0056	0 .0009
2.87	0 .0001	0 .0110	0 .0406	0 .0217	41 .985	0 .6875	0 .0057	0 .0010
2.88	0 .0001	0 .0108	0 .0399	0 .0213	42 .584	0 .6944	0 .0057	0 .0010
2.89	0 .0001	0 .0107	0 .0392	0 .0208	43 .192	0 .7013	0 .0058	0 .0010
2.90	0 .0001	0 .0105	0 .0386	0 .0204	43 .809	0 .7082	0 .0058	0 .0010
2.91	0 .0001	0 .0103	0 .0379	0 .0200	44 .435	0 .7153	0 .0059	0 .0010
2.92	0 .0001	0 .0102	0 .0372	0 .0196	45 .070	0 .7223	0 .0059	0 .0010
2.93	0 .0001	0 .0100	0 .0366	0 .0192	45 .715	0 .7295	0 .0060	0 .0010
2.94	0 .0001	0 .0098	0 .0360	0 .0188	46 .370	0 .7367	0 .0060	0 .0010

Tafel IV [0, i].

a	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♆ [0.8]
2.95	0″.0001	0″.0097	0″.0354	0″.0184	47″.034	0″.7438	0″.0061	0″.0010
2.96	0 .0001	0 .0095	0 .0348	0 .0181	47 .709	0 .7511	0 .0062	0 .0010
2.97	0 .0001	0 .0094	0 .0342	0 .0178	48 .393	0 .7584	0 .0062	0 .0011
2.98	0 .0001	0 .0092	0 .0337	0 .0174	49 .088	0 .7657	0 .0063	0 .0011
2.99	0 .0001	0 .0090	0 .0331	0 .0171	49 .794	0 .7731	0 .0063	0 .0011
3.00	0 .0001	0 .0089	0 .0326	0 .0168	50 .510	0 .7807	0 .0064	0 .0011
3.01	0 .0001	0 .0088	0 .0320	0 .0165	51 .238	0 .7882	0 .0064	0 .0011
3.02	0 .0001	0 .0086	0 .0315	0 .0162	51 .976	0 .7957	0 .0065	0 .0011
3.03	0 .0001	0 .0085	0 .0310	0 .0158	52 .726	0 .8034	0 .0065	0 .0011
3.04	0 .0001	0 .0084	0 .0305	0 .0155	53 .488	0 .8111	0 .0066	0 .0011
3.05	0 .0001	0 .0082	0 .0300	0 .0152	54 .261	0 .8189	0 .0067	0 .0011
3.06	0 .0001	0 .0081	0 .0295	0 .0149	55 .046	0 .8267	0 .0067	0 .0011
3.07	0 .0001	0 .0080	0 .0291	0 .0147	55 .844	0 .8346	0 .0068	0 .0012
3.08	0 .0001	0 .0079	0 .0286	0 .0145	56 .654	0 .8425	0 .0068	0 .0012
3.09	0 .0001	0 .0078	0 .0281	0 .0142	57 .476	0 .8505	0 .0069	0 .0012
3.10	—	0 .0076	0 .0277	0 .0139	58 .312	0 .8585	0 .0069	0 .0012
3.11	—	0 .0075	0 .0272	0 .0137	59 .162	0 .8666	0 .0070	0 .0012
3.12	—	0 .0074	0 .0268	0 .0134	60 .024	0 .8748	0 .0071	0 .0012
3.13	—	0 .0073	0 .0264	0 .0132	60 .901	0 .8830	0 .0071	0 .0012
3.14	—	0 .0072	0 .0260	0 .0130	61 .792	0 .8913	0 .0072	0 .0012
3.15	—	0 .0070	0 .0256	0 .0128	62 .697	0 .8996	0 .0072	0 .0012
3.16	—	0 .0069	0 .0252	0 .0125	63 .616	0 .9080	0 .0073	0 .0013
3.17	—	0 .0068	0 .0248	0 .0123	64 .551	0 .9165	0 .0074	0 .0013
3.18	—	0 .0068	0 .0244	0 .0121	65 .500	0 .9250	0 .0074	0 .0013
3.19	—	0 .0067	0 .0241	0 .0119	66 .465	0 .9335	0 .0075	0 .0013
3.20	—	0 .0066	0 .0237	0 .0117	67 .447	0 .9422	0 .0075	0 .0013
3.21	—	0 .0065	0 .0234	0 .0114	68 .444	0 .9510	0 .0076	0 .0013
3.22	—	0 .0064	0 .0230	0 .0112	69 .458	0 .9597	0 .0077	0 .0013
3.23	—	0 .0063	0 .0227	0 .0110	70 .488	0 .9685	0 .0077	0 .0013
3.24	—	0 .0062	0 .0223	0 .0108	71 .536	0 .9774	0 .0078	0 .0014
3.25	—	0 .0061	0 .0220	0 .0106	72 .601	0 .9864	0 .0078	0 .0014
3.26	—	0 .0060	0 .0217	0 .0105	73 .684	0 .9954	0 .0079	0 .0014
3.27	—	0 .0060	0 .0213	0 .0103	74 .786	1 .0045	0 .0079	0 .0014
3.28	—	0 .0059	0 .0210	0 .0102	75 .906	1 .0136	0 .0080	0 .0014
3.29	—	0 .0058	0 .0207	0 .0100	77 .045	1 .0228	0 .0081	0 .0014

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.30	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.31	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.32	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.33	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.34	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.35	—	0 .0053	0 .0189	0 .0091	84 .302	[illegible]	[illegible]	0 .0015
3.36	—	0 .0053	0 .0187	0 .0089	85 .587	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.37	—	0 .0052	0 .0184	[illegible]	86 .894	1 .0959	[illegible]	0 .0015
3.38	—	0 .0051	0 .0181	0 .0087	88 .225	1 .1055	0 .0087	[illegible]
3.39	—	0 .0051	0 .0178	0 .0085	89 .579	1 .1156	0 .0088	[illegible]
3.40	—	0 .0050	0 .0176	0 .0084	90 .955	1 .1255	0 .0088	0 .0016
3.41	—	0 .0049	0 .0174	0 .0083	92 .361	1 .1356	0 .0089	0 .0016
3.42	—	0 .0049	0 .0172	0 .0081	93 .790	1 .1457	0 .0090	0 .0016
3.43	—	0 .0048	0 .0169	0 .0080	95 .244	1 .1587	0 .0090	0 .0016
3.44	—	0 .0047	0 .0167	0 .0079	96 .724	1 .1691	0 .0091	0 .0016
3.45	—	0 .0047	0 .0164	0 .0078	98 .232	1 .1794	0 .0092	0 .0016
3.46	—	0 .0046	0 .0162	0 .0076	99 .768	1 .1898	0 .0092	0 .0017
3.47	—	0 .0045	0 .0160	0 .0075	101 .331	1 .2003	0 .0093	0 .0017
3.48	—	0 .0045	0 .0158	0 .0074	102 .925	1 .2109	0 .0094	0 .0017
3.49	—	0 .0044	0 .0156	0 .0073	104 .549	1 .2215	0 .0094	0 .0017
3.50	—	0 .0044	0 .0154	0 .0072	106 .203	1 .2322	0 .0095	0 .0017
3.51	—	0 .0043	0 .0152	0 .0071	107 .888	1 .2429	0 .0096	0 .0017
3.52	—	0 .0042	0 .0150	0 .0070	109 .606	1 .2538	0 .0097	0 .0017
3.53	—	0 .0042	0 .0148	0 .0068	111 .355	1 .2647	0 .0097	0 .0018
3.54	—	0 .0041	0 .0145	0 .0067	113 .138	1 .2757	0 .0098	0 .0018
3.55	—	0 .0041	0 .0143	0 .0066	114 .954	1 .2868	0 .0099	0 .0018
3.56	—	0 .0040	0 .0141	0 .0065	116 .806	1 .2979	0 .0099	0 .0018
3.57	—	0 .0040	0 .0139	0 .0064	118 .694	1 .3092	0 .0100	0 .0018
3.58	—	0 .0039	0 .0137	0 .0063	120 .620	1 .3205	0 .0101	0 .0018
3.59	—	0 .0038	0 .0136	0 .0062	122 .584	1 .3319	0 .0102	0 .0018
3.60	—	0 .0038	0 .0134	0 .0062	124 .588	1 .3433	0 .0102	0 .0018
3.61	—	0 .0037	0 .0132	0 .0061	126 .631	1 .3549	0 .0103	0 .0019
3.62	—	0 .0037	0 .0130	0 .0060	128 .713	1 .3665	0 .0104	0 .0019
3.63	—	0 .0036	0 .0129	0 .0059	130 .837	1 .3783	0 .0105	0 .0019
3.64	—	0 .0036	0 .0127	0 .0058	133 .005	1 .3901	0 .0105	0 .0019

Tafel IV [0, *i*].

a	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♆ [0.8]
3.65	—	0″.0035	0″.0126	0″.0057	135″.218	1″.4019	0″.0106	0″.0019
3.66	—	0 .0035	0 .0124	0 .0056	137 .476	1 .4138	0 .0107	0 .0019
3.67	—	0 .0035	0 .0122	0 .0056	139 .780	1 .4259	0 .0108	0 .0019
3.68	—	0 .0034	0 .0121	0 .0055	142 .132	1 .4380	0 .0108	0 .0019
3.69	—	0 .0034	0 .0119	0 .0054	144 .534	1 .4503	0 .0109	0 .0020
3.70	—	0 .0033	0 .0118	0 .0053	146 .985	1 .4626	0 .0110	0 .0020
3.71	—	0 .0033	0 .0116	0 .0052	149 .488	1 .4750	0 .0111	0 .0020
3.72	—	0 .0033	0 .0115	0 .0052	152 .044	1 .4875	0 .0112	0 .0020
3.73	—	0 .0032	0 .0113	0 .0051	154 .655	1 .5000	0 .0112	0 .0020
3.74	—	0 .0032	0 .0112	0 .0050	157 .322	1 .5127	0 .0113	0 .0020
3.75	—	0 .0031	0 .0111	0 .0050	160 .047	1 .5254	0 .0114	0 .0020
3.76	—	0 .0031	0 .0109	0 .0049	162 .831	1 .5383	0 .0115	0 .0020
3.77	—	0 .0031	0 .0108	0 .0048	165 .676	1 .5512	0 .0116	0 .0021
3.78	—	0 .0030	0 .0107	0 .0048	168 .584	1 .5642	0 .0116	0 .0021
3.79	—	0 .0030	0 .0105	0 .0047	171 .556	1 .5773	0 .0117	0 .0021
3.80	—	0 .0029	0 .0104	0 .0047	174 .594	1 .5905	0 .0118	0 .0021
3.81	—	0 .0029	0 .0103	0 .0046	177 .701	1 .6038	0 .0119	0 .0021
3.82	—	0 .0029	0 .0101	0 .0045	180 .879	1 .6172	0 .0120	0 .0021
3.83	—	0 .0028	0 .0100	0 .0045	184 .128	1 .6307	0 .0121	0 .0021
3.84	—	0 .0028	0 .0099	0 .0044	187 .450	1 .6442	0 .0121	0 .0022
3.85	—	0 .0028	0 .0098	0 .0043	190 .851	1 .6579	0 .0122	0 .0022
3.86	—	0 .0027	0 .0096	0 .0043	194 .331	1 .6717	0 .0123	0 .0022
3.87	—	0 .0027	0 .0095	0 .0042	197 .893	1 .6856	0 .0124	0 .0022
3.88	—	0 .0027	0 .0094	0 .0042	201 .539	1 .6995	0 .0125	0 .0022
3.89	—	0 .0027	0 .0093	0 .0041	205 .272	1 .7136	0 .0126	0 .0022
3.90	—	0 .0026	0 .0092	0 .0040	209 .092	1 .7278	0 .0126	0 .0022
3.91	—	0 .0026	0 .0091	0 .0040	213 .006	1 .7420	0 .0127	0 .0022
3.92	—	0 .0026	0 .0090	0 .0039	217 .014	1 .7564	0 .0128	0 .0023
3.93	—	0 .0025	0 .0089	0 .0039	221 .120	1 .7708	0 .0129	0 .0023
3.94	—	0 .0025	0 .0087	0 .0038	225 .328	1 .7853	0 .0130	0 .0023
3.95	—	0 .0025	0 .0086	0 .0038	229 .641	1 .8000	0 .0131	0 .0023
3.96	—	0 .0025	0 .0085	0 .0037	234 .062	1 .8148	0 .0132	0 .0023
3.97	—	0 .0024	0 .0084	0 .0037	238 .593	1 .8296	0 .0133	0 .0023
3.98	—	0 .0024	0 .0083	0 .0036	243 .237	1 .8446	0 .0133	0 .0023
3.99	—	0 .0024	0 .0082	0 .0036	248 .000	1 .8597	0 .0134	0 .0024

Tafel IV [0, *i*].

a	☿ [0.1]	♀ [0.2]	♁ [0.3]	♂ [0.4]	♃ [0.5]	♄ [0.6]	♅ [0.7]	♉ [0.8]
4.00	—	0″.0023	0″.0081	0″.0035	252″.891	1″.8750	0″.0135	0″.0024
4.01	—	0 .0023	0 .0080	0 .0035	257 .905	1 .8902	0 .0136	0 .0024
4.02	—	0 .0023	0 .0079	0 .0035	263 .051	1 .9056	0 .0137	0 .0024
4.03	—	0 .0023	0 .0078	0 .0034	268 .332	1 .9211	0 .0138	0 .0024
4.04	—	0 .0022	0 .0077	0 .0034	273 .755	1 .9367	0 .0139	0 .0024
4.05	—	0 .0022	0 .0077	0 .0033	279 .323	1 .9525	0 .0140	0 .0025
4.06	—	0 .0022	0 .0076	0 .0033	285 .042	1 .9684	0 .0141	0 .0025
4.07	—	0 .0022	0 .0075	0 .0033	290 .917	1 .9843	0 .0142	0 .0025
4.08	—	0 .0022	0 .0074	0 .0032	296 .953	2 .0004	0 .0143	0 .0025
4.09	—	0 .0021	0 .0073	0 .0032	303 .158	2 .0166	0 .0143	0 .0025
4.10	—	0 .0021	0 .0072	0 .0032	309 .533	2 .0330	0 .0144	0 .0025
4.11	—	0 .0021	0 .0072	0 .0031	316 .091	2 .0493	0 .0145	0 .0026
4.12	—	0 .0021	0 .0071	0 .0031	322 .838	2 .0659	0 .0146	0 .0026
4.13	—	0 .0021	0 .0070	0 .0031	329 .776	2 .0825	0 .0147	0 .0026
4.14	—	0 .0020	0 .0069	0 .0030	336 .916	2 .0993	0 .0148	0 .0026
4.15	—	0 .0020	0 .0068	0 .0030	344 .260	2 .1162	0 .0149	0 .0026
4.16	—	0 .0020	0 .0067	0 .0029	351 .833	2 .1332	0 .0150	0 .0026
4.17	—	0 .0020	0 .0067	0 .0029	359 .626	2 .1503	0 .0151	0 .0027
4.18	—	0 .0019	0 .0066	0 .0029	367 .652	2 .1676	0 .0152	0 .0027
4.19	—	0 .0019	0 .0065	0 .0028	375 .923	2 .1850	0 .0153	0 .0027
4.20	—	0 .0019	0 .0065	0 .0028	384 .446	2 .2025	0 .0154	0 .0027
4.21	—	0 .0019	0 .0064	0 .0028	393 .234	2 .2202	0 .0155	0 .0027
4.22	—	0 .0019	0 .0063	0 .0027	402 .297	2 .2380	0 .0156	0 .0027
4.23	—	0 .0018	0 .0063	0 .0027	411 .648	2 .2558	0 .0157	0 .0028
4.24	—	0 .0018	0 .0062	0 .0027	421 .295	2 .2738	0 .0158	0 .0028
4.25	—	0 .0018	0 .0061	0 .0026	431 .253	2 .2920	0 .0159	0 .0028
4.26	—	0 .0018	0 .0061	0 .0026	441 .536	2 .3102	0 .0160	0 .0028
4.27	—	0 .0018	0 .0060	0 .0026	452 .156	2 .3286	0 .0161	0 .0028
4.28	—	0 .0017	0 .0059	0 .0025	463 .132	2 .3471	0 .0162	0 .0028
4.29	—	0 .0017	0 .0059	0 .0025	474 .476	2 .3657	0 .0163	0 .0028
4.30	—	0 .0017	0 .0058	0 .0025	486. 205	2 .3846	0 .0164	0 .0029

Sachregister.





